Logica

A. *Introduzione*

La logica formale e' una conseguenza, o meglio, come vedremo, un isomorfismo della teoria degli insiemi: per ora presento solamente il metodo cosiddetto "intuitivo"
Nella seconda stesura del sito aggiungero' come alternativa per uno studio piu' approfondito,il metodo "assiomatico" (dovuto al filosofo Ludwig Wittgenstein)

- Proposizioni
- Calcolo delle proposizioni: metodo classico
- Predicati e quantificatori
- Logica ed insiemi

B. *Proposizioni*

Consideriamo ora il concetto base della logica, il concetto di **proposizione** e vediamo di metterci d'accordo sia sui concetti che sulla terminologia che useremo

- Nomenclatura
- Definizioni
- Principi della logica
- Proposizioni semplici e complesse
- Tavole di verita'

1. Nomenclatura

Per indicare una *proposizione* useremo le lettere: **p, q, r, s, ...**
Per indicare il valore di *verita'* useremo la lettera: **v**
Per indicare il valore di *falsita'* useremo la lettera: **f.**

2. Definizione

Definiamo *proposizione* una qualunque affermazione cui possa essere associato un valore di verita' (**v**) oppure di falsita' (**f**).

Cioe' per ogni affermazione (frase) devi poter dire se e' vera oppure se e' falsa.
Per abbreviare diciamo che il valore di verita' puo' essere (**v**) oppure (**f**).

Esempi:
"In questo momento ho una penna in mano"
e' una proposizione: infatti posso dire se l'affermazione e' vera (**v**) oppure falsa (**f**)
"Sono bello"
non e' una proposizione: infatti non posso dire se l'affermazione e' vera (**v**) oppure falsa (**f**) per qualcuno potrei essere bello, per altri no
"Due piu' due e' uguale a quattro"
e' una proposizione: infatti posso dire che l'affermazione e' vera (**v**)
"Due piu' due e' uguale a cinque"
e' una proposizione: infatti posso dire che l'affermazione e' falsa (**f**)
"Il film visto ieri e' noioso"
non e' una proposizione: infatti per qualcuno (magari per la mamma del regista) il film puo' non essere

noioso e quindi non posso associare un valore di verita' o falsita' all'affermazione
"Che tempo fa?"
non e' una proposizione: infatti non posso associare un valore di verita' o falsita' alla frase
"Porca paletta!"
non e' una proposizione: infatti non posso associare un valore di verita' o falsita' alla frase

---

In pratica non sono proposizioni logiche i giudizi soggettivi, le domande, le esclamazioni e le frasi senza senso.

3. Principi della logica

Avremo i seguenti principi:

- Principio di *identita'*: ogni oggetto del pensiero logico e' uguale solamente a se' stesso e non e' uguale a nessun altro oggetto.
- Principio di *non contraddizione*: la stessa proposizione non puo' essere contemporaneamente vera e falsa.
  Il fatto che **p** sia vera esclude che **p** sia falsa.
  Il fatto che **p** sia falsa esclude che **p** sia vera.
- Principio del *terzo escluso*: ad ogni proposizione si potra' associare **solamente** il valore **vero** oppure **falso** e non esiste una terza possibilita' ***(tertium non datur)***
  In latino: il terzo non e' dato; vuol dire che una terza possibilita' non esiste.

4. Proposizioni semplici e complesse

Distinguiamo fra proposizioni semplici e proposizioni complesse.
Diremo che una proposizione e' **semplice** se non e' possibile scomporla in parti piu' semplici per cui sia possibile dire se sono vere o false.
Altrimenti diremo che le proposizioni sono **complesse**

Esempi:
Il cane ha la coda
e' una proposizione semplice, infatti non posso ridurla ulteriormente

Oggi piove e tira il vento
e' una proposizione composta dalle due proposizioni:
Oggi piove
Oggi tira il vento

O leggo un libro o guardo un film
e' una proposizione composta dalle due proposizioni:
Leggo un libro
Guardo un film.

5. Tavole di verita'

Ad ogni proposizione possiamo associare o il valore **v** oppure il valore **f** .

p	
v **f**	**la proposizione e' vera** **la proposizione e' falsa**

cioe'con una proposizione ho due possibilita' .

Se abbiamo due proposizioni **p** e **q** , allora i valori possibili saranno:

p	q	
v	v	la prima e' vera e la seconda e' vera
v	f	la prima e' vera e la seconda e' falsa
f	v	la prima e' falsa e la seconda e' vera
f	f	la prima e' falsa e la seconda e' falsa

cioe' quattro possibilita' .

Se abbiamo tre proposizioni **p**, **q** ed **r** allora i valori possibili saranno:

p	q	r
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

cioe' otto possibilita' .

In pratica se ho **n** proposizioni allora avro' $\mathbf{2^n}$ possibilita'.

C. *Calcolo delle proposizioni: metodo classico*

Vediamo ora di procedere al calcolo delle proposizioni utilizzando il metodo piu' usato nei bienni: passeremo in rassegna i vari elementi uno per uno

- Negazione
- Congiunzione logica
- Disgiunzione inclusiva
- Operatori logici fondamentali
- Disgiunzione esclusiva
- Implicazione materiale
- Deduzione logica
- Coimplicazione
- Doppia deduzione logica
- Funzioni proposizionali
- Funzioni proposizionali equiveridiche
- Tautologia e contraddizione

1. Negazione

La negazione e' un'operazione **unaria** perche' si applica su una sola proposizione ed e' definita come l'operazione che applicata a **p** restituisce il valore di verita' contrario di **p**. Analogamente alla simbologia usata negli insiemi complementari, indicheremo la negazione di **p** con il simbolo $\overline{\mathbf{p}}$.

Cioe' avremo:

$$\overline{\mathbf{p}} = \text{non } \mathbf{p}$$

Avremo quindi la tavola di verita':

$\mathbf{p}$	$\overline{\mathbf{p}}$
v	f
f	v

Cioe':
- se **p** e' vera, allora $\overline{\mathbf{p}}$ e' falsa
- se **p** e' falsa allora $\overline{\mathbf{p}}$ e' vera

Esempi:
Data la proposizione:
Roma e' la capitale d'Italia
la sua negazione sara':
Roma non e' la capitale d'Italia
La prima e' vera e la seconda e' falsa.

Data la proposizione:
3 piu' 3 e' uguale a nove
la sua negazione sara':
3 piu' 3 non e' uguale a 9
La prima e' falsa e la seconda e' vera.

Da notare che l'insieme complementare di un insieme **A** rispetto ad **E** e' l'insieme degli elementi di **E** che **non** appartengono ad **A.**
Data la proposizione:

{elementi appartenenti ad A}

la sua negazione sara':

{elementi non appartenenti ad A}

e quindi:

$$\overline{\mathbf{A}} = \text{non } \mathbf{A}$$

cioe' la negazione in logica corrisponde al complementare nella teoria degli insiemi.

Attenzione!: nel discorso la negazione di una proposizione si ottiene **solamente** aggiungendo nel discorso la particella **non**.
Cosi' la negazione di:
"Parigi e' la capitale della Francia"

si ottiene in modo corretto con:
"Parigi non e' la capitale della Francia".

Vista l'importanza del concetto, segnalo l'equivalenza, all'interno delle proprie teorie, dei simboli
non nel discorso ordinario
/ (barra su una qualunque relazione) nelle definizioni; esempio $\notin$ si legge "**non appartiene**"
- (non) soprasegnato su proposizioni in logica
- (insieme complementare) soprasegnato su insiemi

(not) in informatica

---

La doppia negazione equivale alla proposizione di partenza:

$\overline{\mathbf{p}}$	$\overline{\mathbf{p}}$	$\overline{\overline{\mathbf{p}}}$
v **f**	**f** **v**	**v** **f**

Basta osservare l'uguaglianza delle tavole di verita'.
Sarebbe a dire:
Due negazioni successive equivalgono ad un'affermazione.

E' un concetto che troviamo piuttosto diffusamente in matematica:

- meno per meno fa piu'
- il complementare del complementare di un insieme e' l'insieme di partenza
- l'opposto dell'opposto di un numero equivale al numero stesso
- l'inverso dell'inverso di un numero equivale al numero stesso.

Esempio:
"Non e' vero che Roma non e' la capitale dell'Italia"
equivale a
"E' vero che Roma e' la capitale dell'Italia".

2. Congiunzione logica

La congiunzione logica (**e**) e' un'operazione *binaria* perche' si applica su due proposizioni ed e' definita come l'operazione che applicata a **p** e **q** restituisce i seguenti valori di verita'. Oltre al termine **et** e' utilizzato il simbolo $\wedge$ (et):

p	**q**	**p $\wedge$ q**
v **v** **f** **f**	**v** **f** **v** **f**	**v** **f** **f** **f**

Cioe' la proposizione composta e' vera solo se sono entrambe vere le proposizioni componenti
Cioe' e' vera la prima **e** e' vera la seconda.

Anche se i concetti della logica non sempre trovano riscontro nel discorso normale, ove posso faccio un esempio per meglio fissare il concetto:
"Se sarai promosso ed avrai la media del 7, ti comprero' il motorino"
E' un esempio abbastanza calzante. Infatti:

- si puo' essere promossi e non avere la media del 7
- si puo' avere la media del 7 e non essere promossi (ad esempio avere 4 in una materia e 10 in una seconda e 7 in tutte le altre)

Perche' la condizione si verifichi (sia vera), devi contemporaneamente essere promosso e avere la media del 7:

- Se sei promosso ed hai la media del 7 ottieni il motorino
  E' la prima riga della tabella **v ∧ v = v**
- Se sei promosso ma non hai la media del 7 non ottieni il motorino
  E' la seconda riga della tabella **v ∧ f = f**
- Se non sei promosso ed hai la media del 7 non ottieni il motorino
  E' la terza riga della tabella **f ∧ v = f**
- Se non sei promosso e non hai la media del 7 non ottieni il motorino
  E' la quarta riga della tabella **f ∧ f = f**

In matematica, vista l'importanza del concetto abbiamo la quasi equivalenza, all'interno delle proprie teorie, dei simboli:

$\cdot$ (prodotto) in aritmetica

, (virgola) nel discorso

$\cap$ (intersezione) in teoria degli insiemi

$\wedge$ (et) in logica (ma anche and logico)

 (and logico) in informatica.

3. Disgiunzione inclusiva

Anche la disgiunzione inclusiva (**o, od anche**) e' un'operazione **binaria** perche' si applica su due proposizioni ed e' definita come l'operazione che applicata a **p** e **q** restituisce i seguenti valori di verita'.
E' utilizzato, oltre al termine **vel,** il simbolo **∨** (vel):

p	q	p ∨ q
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Cioe' la proposizione composta e' vera se almeno una delle proposizioni componenti e' vera.
Cioe' per la verita' della proposizione composta puo' essere vera la prima **o** puo' essere vera la seconda **o** possono essere vere entrambe.

In italiano e' un po' difficile fare un esempio perche' la **o** ha significato doppio; significa:

- o l'uno o l'altro od entrambe
- o l'uno o l'altro ma non entrambe

Vediamo comunque un esempio:
"Quando vado al cinema compro Pop corn ed anche noccioline" e
"mangio noccioline o popcorn".
In questo caso la frase considerata in rosso e' da intendere:
mangio noccioline o mangio pop corn o mangio tutti e due:

- Se mangi noccioline ed anche mangi pop corn
  E' la prima riga della tabella **v ⋁ v = v**
- Se mangi noccioline e non mangi pop corn
  E' la seconda riga della tabella **v ⋁ f = V**
- Se non mangi noccioline ma mangi pop corn
  E' la terza riga della tabella **f ⋁ v = V**
- Se non mangi noccioline e non mangi pop corn
  E' la quarta riga della tabella **f ⋁ f = f**

Mentre in italiano la **o** si puo' interpretare in modo diverso nella lingua latina; vengono usate due congiunzioni diverse per indicare:

- o l'uno o l'altro o tutte e due (o inclusivo) **vel**
- o l'uno o l'altro e non tutte e due (o esclusivo) **aut**

Quindi in logica vengono usate preferibilmente i simboli in latino piuttosto che in italiano

e → et
o inclusivo → vel
o esclusivo → aut

Anche qui, vista l'importanza del concetto, abbiamo l'equivalenza, all'interno delle proprie teorie, dei simboli:
; (punto e virgola) nel discorso
∪ (unione) in teoria degli insiemi
⋁ (vel) in logica

(or) in informatica

Per finire, mostriamo che vale la proprieta' distributiva della congiunzione logica rispetto alla disgiunzione inclusiva:

(p vel q) and r ≡ (p and r) vel (q and r)

o meglio in formule:

$$(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$$

Per dimostrarlo basta calcolare le tavole di verita' per l'espressione prima dell'uguale e per l'espressione dopo l'uguale; se le due tavole sono uguali, allora le espressioni sono equivalenti.
Prova a farlo per esercizio poi controlla la soluzione
il simbolo ≡ significa "equiveridiche" cioe' con gli stessi valori di verita'.

Esercizio:
Dimostriamo che vale la proprieta' distributiva della congiunzione logica rispetto alla disgiunzione inclusiva:
$(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$
Calcoliamo le tavole di verita' del termine prima dell'uguale e del termine dopo l'uguale:
Tavole di verita' del termine prima dell'uguale:

p	q	r	p ⋁ q	(p ⋁ q) ⋀r
v	v	v	v	v
v	v	f	v	f
v	f	v	v	v
v	f	f	v	f

f	v	v	v	v
f	v	f	v	f
f	f	v	f	f
f	f	f	f	f

Prima scrivo i valori possibili di **p**, **q** ed **r** ; per fare in fretta:
in **p**: quattro veri e quattro falsi
in **q**: due veri, due falsi, due veri e due falsi
in **r**: vero, falso, vero, falso,.... alternati
nella quarta colonna e' la disgiunzione inclusiva tra **p** e **q**, che e' falsa solo se le componenti sono entrambe false
la quinta colonna e' la congiunzione logica tra **p vel q** e **r**, che e' vera solo sono contemporaneamente vere la prima e la seconda.

Tavole di verita' del termine dopo l'uguale:

p	q	r	$p \land r$	$q \land r$	$(p \land r) \lor (q \land r)$
v	v	v	v	v	v
v	v	f	f	f	f
v	f	v	v	f	v
v	f	f	f	f	f
f	v	v	f	v	v
f	v	f	f	f	f
f	f	v	f	f	f
f	f	f	f	f	f

Prima scrivo i valori possibili di **p**, **q** ed **r** con la stessa disposizione della tabella precedente; per fare in fretta:
in **p**: quattro veri e quattro falsi
in **q**: due veri, due falsi, due veri e due falsi
in **r**: vero, falso, vero, falso,.... alternati
nella quarta colonna e' la congiunzione logica tra **p** e **r**, che e' vera solo sono contemporaneamente vere la prima e la seconda
nella quinta colonna e' la congiunzione logica tra **q** e **r**, che e' vera solo sono contemporaneamente vere la prima e la seconda
la sesta colonna e' la disgiunzione inclusiva tra **p and r** e **q and r**, che e' falsa solo se le componenti sono entrambe false

Siccome le due colonne finali hanno gli stessi valori di verita' ne segue che il termine prima ed il termine dopo l'uguale sono equivalenti (o meglio, come vedremo piu'avanti, le due proposizioni sono **equiveridiche**).

4. Operatori logici fondamentali

Gli operatori visti sinora **not, et, vel** sono detti *operatori logici fondamentali* perche' tramite essi e' possibile ricavare tutti gli altri operatori che considereremo; da qui la loro importanza fondamentale.
In pratica *tutta la logica puo' essere trattata con questi soli tre operatori.*
Questo sara' particolarmente significativo in discipline, quali informatica, strettamente collegate alla logica.

5. Disgiunzione esclusiva

Anche la disgiunzione esclusiva (**o l'uno, oppure l'altro ma non tutti e due**) e' un'operazione **binaria** perche' si applica su due proposizioni ed e' definita come l'operazione che applicata a **p** e **q** restituisce i seguenti valori di verita' (si usa il simbolo **aut**):

p	q	p aut q
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Cioe': la proposizione composta e' vera solamente se una sola delle proposizioni componenti e' vera.
Cioe': per la verita' della proposizione composta puo' essere vera la prima **o** puo' essere vera la seconda ma non possono essere vere entrambe.

Si chiama disgiunzione *esclusiva* perche' **esclude** dal valore di verita' il caso in cui entrambe le proposizioni componenti siano vere

---

Esempio:
"**Avendo due ore a disposizione**
vado al cinema o (oppure) a mangiare una pizza cogli amici"
In questo caso la frase considerata in rosso e' da intendere:
o vado al cinema o vado a mangiare una pizza ma non ho tempo per fare tutte e due le cose, quindi l'una esclude l'altra:

- Se vado al cinema ed anche vado a mangiare la pizza
  E' la prima riga della tabella **v aut v = f**
  la frase non puo' essere vera non avendo il tempo di fare entrambe le cose
- Se vado al cinema e non vado a mangiare la pizza
  E' la seconda riga della tabella **v aut f = v**
- Se non vado al cinema ma vado a mangiare la pizza
  E' la terza riga della tabella **f aut v = v**
- Se non vado al cinema e non vado a mangiare la pizza
  E' la quarta riga della tabella **f aut f = f**

In informatica, per indicarlo, si usa **eor**
In teoria degli insiemi il concetto corrispondente e' la differenza simmetrica

---

Per finire mostriamo che possiamo ottenere la disgiunzione esclusiva utilizzando gli operatori logici fondamentali:

p aut q ≡ non [(p and q) vel ((non p) and (non q))]

o meglio in formule:

$$p \text{ aut } q \equiv \overline{[(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})]}$$

Per dimostrarlo basta calcolare le tavole di verita' per l'espressione prima dell'uguale e per l'espressione dopo l'uguale: se le due tavole sono uguali allora le espressioni sono equivalenti.
Prova a farlo per esercizio poi controlla la soluzione:

Dimostriamo che:
$p \text{ aut } q \equiv \overline{[(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})]}$
Calcoliamo le tavole di verita' del termine prima dell'uguale e del termine dopo l'uguale
La tavola di verita' del termine prima dell'uguale e' la disgiunzione esclusiva quindi:

p	q	p aut q
v v f f	v f v f	f v v f

La tavola di verita' del termine dopo l'uguale e':

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$	$\overline{[(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})]}$
v v f f	v f v f	f f v v	f v f v	v f f f	f f f v	v f f v	f v v f

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
la terza colonna e' la negazione di p
la quarta colonna e' la negazione di q
la quinta colonna e' la congiunzione logica tra **p** e **q**, che e' vera solo se entrambe sono vere
la sesta colonna e' la congiunzione logica tra **non p** e **non q**, che e' vera solo se entrambe sono vere
la settima colonna e' la disgiunzione inclusiva tra **p and q** e **((non p) and (non q))**, che e' falsa solo se entrambe sono false
l'ultima colonna e' la negazione della colonna precedente: il vero diventa falso ed il falso diventa vero

Siccome le due colonne finali hanno gli stessi valori di verita' ne segue che il termine prima ed il termine dopo l'uguale sono equivalenti (o meglio, come vedremo piu'avanti, le due proposizioni sono **equiveridiche**).

6. Implicazione materiale

Con l'implicazione materiale arriviamo a dei concetti non piu' corrispondenti al discorso ordinario.
Infatti l'implicazione materiale e' solo da considerare (per ora) come tabella cui corrispondono certi valori di verita' e non come discorso di causa-effetto; per questo e' detta "materiale" cioe' legata alla materiale considerazione dei valori di verita'.
Possiamo cioe' considerare anche proposizioni prive di senso tipo:
"Ho piu' di due braccia"
"Le rose sono blu"

L'implicazione materiale (**se...., allora**) e' un'operazione di composizione binaria che si applica su due proposizioni **p, q** restituendo la proposizione **r** nel seguente modo:

r = se p allora q

si usa anche il simbolo: $\rightarrow$
e restituisce i seguenti valori di verita':

p	q	$p \rightarrow q$
v v f f	v f v f	v f v v

Cioe' la proposizione composta e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa.

Quindi non sottolineamo nessun nesso di causa-effetto nelle parole **se ... allora** ma semplicemente un collegamento dato dalle tavole di verita'.

Ritornando all'esempio preso sopra per esercizio vediamo la tavola di verita' per due proposizioni:
p = "Non ho piu' di due braccia"
q = "Le rose non sono blu"

- "Se non ho piu' di due braccia allora le rose non sono blu"
  E' la prima riga della tabella **v → v = v**
- "Se non ho piu' di due braccia allora le rose sono blu"
  E' la seconda riga della tabella **v → f = f**
- "Se ho piu' di due braccia allora le rose non sono blu"
  E' la terza riga della tabella **f → v = v**
- "Se ho piu' di due braccia allora le rose sono blu"
  E' la quarta riga della tabella **f → f = v**

Come vedi e' un po' difficile trovarvi un po' di senso comune.

Pero' siccome un nesso logico di causa-effetto serve, introduciamo nella prossima pagina il concetto di **deduzione logica**, che pero' non potra' essere collegato alle tavole di verita',

---

Per finire, mostriamo che possiamo ottenere l'implicazione materiale utilizzando gli operatori logici fondamentali:

$$p \rightarrow q \equiv (\text{non } p) \text{ vel } q$$

o meglio in formule:

$$p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$$

Per dimostrarlo, basta calcolare le tavole di verita' per l'espressione prima dell'uguale e per l'espressione dopo l'uguale; se le due tavole sono uguali, allora le espressioni sono equivalenti.
Prova a farlo per esercizio poi controlla la soluzione:

Esercizio:

Dimostriamo che vale l'implicazione materiale si puo' definire mediante gli operatori fondamentali:
$p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$
Calcoliamo le tavole di verita' del termine prima dell'uguale e del termine dopo l'uguale.
La tavola di verita' del termine prima dell'uguale e' quella dell'implicazione materiale:

p	q	p → q
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Tavole di verita' del termine dopo l'uguale:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

Siccome le due colonne finali hanno gli stessi valori di verita' ne segue che il termine prima ed il termine dopo l'uguale sono equivalenti (o meglio, come vedremo piu'avanti, le due proposizioni sono **equiveridiche**).

7. Deduzione logica

La *deduzione logica* (da non confondere assolutamente con l'implicazione materiale) e' il ragionamento che e' base della dimostrazione di ogni teorema.
Non e' un connettivo logico e pertanto non ha una tavola di verita'.

Un teorema viene sempre enunciato nel seguente modo:
Da Ipotesi segue Tesi
cioe'
Se vale l' Ipotesi allora vale la Tesi.
Ma, contrariamente all'implicazione materiale, stavolta abbiamo una relazione di causa nel senso che l'Ipotesi (considerata sempre vera) e' causa della verita' della Tesi.

L'ipotesi e' sempre vera perche' non ha significato parlare di un teorema la cui ipotesi sia falsa.
Inoltre gli argomenti di Ipotesi e Tesi devono essere correlati ed omogenei .
Ad esempio, e' valido dire:
Se un triangolo ha due lati uguali allora ha due angoli uguali
mentre non ha senso dire:
Se un triangolo ha due lati uguali allora l'ombrello e' aperto

---

In alcuni testi si usa il simbolo → (una linea sola) per indicare l'implicazione materiale
ed il simbolo ⇒ (con doppia linea) per la deduzione logica
ma in altri testi viene indicato diversamente.
Tu cerca di usare gli stessi simboli che usa il tuo Insegnante.

8. Coimplicazione

Anche la *coimplicazone* e' solo da considerare come tabella cui corrispondono certi valori di verita' e non come discorso logico.

La coimplicazione e' un'operazione di composizione binaria che si applica su due proposizioni **p, q** restituendo la proposizione **r** nel seguente modo:

r = p coimplica q

Si usa anche il simbolo ↔ e restituisce i seguenti valori di verita':

p	q	$p \leftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Cioe'
la proposizione composta e' falsa se solamente una delle proposizioni componenti e' falsa.

Anche qui non esiste (per ora) nessun nesso di causa-effetto nelle parole **coimplica** ma semplicemente un collegamento dato dalle tavole di verita'.

Vediamo come esempio la tavola di verita' per due proposizioni:
p = "il cane morde"
q = "l'acqua e' chiara"

- "il cane morde coimplica che l'acqua e' chiara"
  E' la prima riga della tabella **v ↔ v = v**
- "il cane morde coimplica che l'acqua non e' chiara"
  E' la seconda riga della tabella **v ↔ f = f**
- "il cane non morde coimplica che l'acqua e' chiara"
  E' la terza riga della tabella **f ↔ v = f**
- "il cane non morde coimplica che l'acqua non e' chiara"
  E' la quarta riga della tabella **f ↔ f = v**

Come vedi anche qui e' un po' difficile trovarvi un po' di senso comune

---

Pero', siccome anche qui un nesso logico di causa-effetto serve, introduciamo nella prossima pagina il concetto di **doppia deduzione logica**.

Per finire, mostriamo che possiamo ottenere la coimplicazione utilizzando gli operatori logici fondamentali:

p ↔ q ≡ (p and q) vel ((non p) and (non q))

o meglio in formule:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\overline{p} \land \overline{q})$$

Per dimostrarlo basta calcolare le tavole di verita' per l'espressione prima dell'uguale e per l'espressione dopo l'uguale; se le due tavole sono uguali allora le espressioni sono equivalenti.
Prova a farlo per esercizio poi controlla la soluzione:
Dimostriamo che:
$p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\overline{p} \land \overline{q})$
Calcoliamo le tavole di verita' del termine prima dell'uguale e del termine dopo l'uguale
La tavola di verita' del termine prima dell'uguale e' la coimplicazione quindi:

p	q	p ↔ q
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Le tavole di verita' del termine dopo l'uguale sono:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \land q$	$\overline{p} \land \overline{q}$	$(p \land q) \lor (\overline{p} \land \overline{q})$
v	v	f	f	v	f	v
v	f	f	v	f	f	f
f	v	v	f	f	f	f
f	f	v	v	f	v	v

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
la terza colonna e' la negazione di p
la quarta colonna e' la negazione di q
la quinta colonna e' la congiunzione logica tra **p** e **q**, che e' vera solo se entrambe sono vere

la sesta colonna e' la congiunzione logica tra **non p** e **non q**, che e' vera solo se entrambe sono vere
l'ultima colonna e' la disgiunzione inclusiva tra **p and q** e **((non p) and (non q))**, che e' falsa solo se entrambe sono false.

Siccome le due colonne finali hanno gli stessi valori di verita' ne segue che il termine prima ed il termine dopo l'uguale sono equivalenti (o meglio, come vedremo piu'avanti, le due proposizioni sono **equiveridiche**).
Da notare che abbiamo come risultato i valori opposti della disgiunzione esclusiva.

9. Doppia deduzione logica

Anche qui non devi confondere la **doppia deduzione logica** con la complicazione.
La **doppia deduzione logica** (indicata col simbolo ⇔ che si legge **se e solo se**) e' una procedura in base alla quale date due proposizioni **Ipotesi** e **Tesi** .si puo' dimostrare:

da Ipotesi ⇒ Tesi

ed anche:

da Tesi ⇒ Ipotesi

Il secondo e' detto anche teorema inverso del primo.
Un teorema ed il suo inverso (se esiste) si possono unificare nel teorema:

Ipotesi ⇔ Tesi

Esempio:
Teorema diretto:
se un triangolo ha due lati uguali allora ha due angoli uguali.
Teorema inverso:
se un triangolo ha due angoli uguali allora ha due lati uguali.
Unifichiamo nel teorema:
Un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.
Quando abbiamo sia un teorema che il teorema inverso allora abbiamo una cosiddetta **condizione necessaria e sufficiente.**
Condizione necessaria e sufficiente perche' un triangolo abbia due angoli uguali e' che abbia due lati uguali.
Mentre, se esiste solamente il teorema diretto diremo che abbiamo solamente una **condizione necessaria.**
Se un quadrilatero e' un rettangolo allora ha le due diagonali congruenti .
Essere un rettangolo e' una condizione solamente necessaria perche' non vale il teorema inverso.

Il teorema inverso sarebbe:
Se un quadrilatero ha due diagonali congruenti allora e' un rettangolo.
ma non e' vero; infatti per essere un rettangolo il quadrilatero deve anche essere un parallelogramma.

In alcuni testi si usa il simbolo ↔ (una linea sola) per indicare la complicazione ed il simbolo ⇔ (con doppia linea) per la doppia deduzione logica, ma in altri testi viene indicato diversamente.
Tu cerca di usare gli stessi simboli che usa il tuo Insegnante.

10. Funzioni proposizionali

Se considero espressioni del tipo:

$$r \equiv \text{non}\ (\ p\ \text{et}\ q\ )$$

oppure:

$$s \equiv (\ \overline{p} \land q\ ) \lor r$$

sono espressioni che assumono valori di verita' dipendenti dai valori di verita' delle espressioni componenti.
Siccome il valore di verita' di tutta l'espressione varia secondo i valori di verita' delle espressioni componenti tutta l'espressione viene chiamata *funzione proposizionale.*

Come esempio troviamo i valori di verita' delle funzioni proposizionali considerate sopra:
1) **r ≡ non (p et q)**
Costruisco la tavola di verita' di **r** partendo dalle proposizioni elementari:

p	q	p et q	r = non (p et q)
v	v	v	f
v	f	f	v
f	v	f	v
f	f	f	v

- prima scrivo i valori possibili di p e q;
  per fare in fretta:
  in **p**: due veri e due falsi
  in **q**: vero, falso, vero, falso alternati
- nella terza colonna la congiunzione logica di **p** e q: vero solo se entrambe sono vere
- ed infine nell'ultima colonna la negazione della precedente: vero diventa falso e falso diventa vero

---

2) $s \equiv (\overline{p} \wedge q) \vee r$
Costruisco la tavola di verita' di **s** partendo dalle proposizioni elementari p, q ed r

p	q	r	$\overline{p}$	$(\overline{p} \wedge q)$	$s = (\overline{p} \wedge q) \vee r$
v	v	v	f	f	v
v	v	f	f	f	f
v	f	v	f	f	v
v	f	f	f	f	f
f	v	v	v	v	v
f	v	f	v	v	v
f	f	v	v	f	v
f	f	f	v	f	f

- prima scrivo i valori possibili di **p**, **q** ed **r** ; per fare in fretta:
  in **p**: quattro veri e quattro falsi
  in **q**: due veri, due falsi, due veri e due falsi
  in **r**: vero, falso, vero, falso,.... alternati
- nella quarta colonna la negazione di **p**: vero diventa falso e falso diventa vero
- nella quinta la congiunzione logica fra $\overline{p}$ e **q**: il risultato e' vero solamente se le componenti sono entrambe vere
- ed infine nell'ultima colonna la disgiunazione inclusiva fra i valori trovati ed **r**: basta che una componente sia vera perche' tutta l'espressione sia vera

---

Sopra ho usato nella prima la notazione discorsiva e nella seconda la notazione mediante simboli: abituati ad usarle entrambe: la prima ti serve per leggere le espressioni e la seconda, preferibilmente, per scriverle.
Ad esempio la seconda si legge:
non p et q, vel r.

11. Funzioni proposizionali equiveridiche

Come in tutte le discipline la prima cosa che introduciamo e' l'equivalente dell'uguaglianza

---

Diremo che due funzioni proposizionali sono **equiveridiche** se le loro tavole di verita' hanno gli stessi valori.
Esempio:

Considero le due espressioni:

$$\overline{p \wedge q} \qquad \overline{p} \vee \overline{q}$$

Costruisco le loro tavole di verita' di **r** partendo dalle proposizioni elementari **p** e **q**:

---

1)

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$
v	v	v	f
v	f	f	v
f	v	f	v
f	f	f	v

- prima scrivo i valori possibili di p e q;
  per fare in fretta:
  in **p**: due veri e due falsi
  in **q**: vero, falso, vero, falso alternati
- nella terza colonna la congiunzione logica di **p** e q: vero solo se entrambe sono vere
- ed infine nell'ultima colonna la negazione della precedente: vero diventa falso e falso diventa vero

---

2)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
v	v	f	f	f
v	f	f	v	v
f	v	v	f	v
f	f	v	v	v

- prima scrivo i valori possibili di p e q;
  per fare in fretta:
  in **p**: due veri e due falsi
  in **q**: vero, falso, vero, falso alternati
- nella terza colonna la negazione di **p**: vero diventa falso e falso diventa vero
- nella quarta colonna la negazione di **q**: vero diventa falso e falso diventa vero
- ed infine nell'ultima colonna la disgiunzione inclusiva delle due precedenti: vero se almeno una delle componenti e' vera

---

Se controlli i risultati, vedi che le due proposizioni considerate sono **equiveridiche** e scriveremo:

$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$$

Naturalmente per controllare se proposizioni date sono equiveridiche devi sempre dare gli stessi valori di verita' alle proposizioni componenti, cioe' se lavori con 2 proposizioni elementari **p** e **q** le prime due colonne delle differenti tabelle devono essere identiche.

La relazione scritta sopra e' la **seconda legge di De Morgan** nel linguaggio della logica (ti ricordo che l'abbiamo gia' vista in teoria degli insiemi)

Similmente vale la **prima legge di De Morgan** che ti consiglio di dimostrare per esercizio:

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$$

Se vuoi controllare se hai fatto giusto:

Dimostrazione prima legge di De Morgan:

La **prima legge di Morgan** dice:

$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

Costruisco le loro tavole di verita' di **r** partendo dalle proposizioni elementari **p** e **q**:

1)

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$
v	v	v	f
v	f	v	f
f	v	v	f
f	f	f	v

- prima scrivo i valori possibili di p e q;
  per fare in fretta:
  in **p**: due veri e due falsi
  in **q**: vero, falso, vero, falso alternati
- nella terza colonna la disgiunzione inclusiva di **p** e q: vero se almeno una e' vera
- ed infine nell'ultima colonna la negazione della precedente: vero diventa falso e falso diventa vero

2)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
v	v	f	f	f
v	f	f	v	f
f	v	v	f	f
f	f	v	v	v

- prima scrivo i valori possibili di p e q;
  per fare in fretta:
  in **p**: due veri e due falsi
  in **q**: vero, falso, vero, falso alternati
- nella terza colonna la negazione di **p**: vero diventa falso e falso diventa vero
- nella quarta colonna la negazione di **q**: vero diventa falso e falso diventa vero
- ed infine nell'ultima colonna la congiunzione logica delle due precedenti: vero solo se entrambe sono vere

Se controlli i risultati vedi che le due proposizioni considerate sono **equiveridiche** come volevamo.

12. Tautologia e contraddizione

Date due proposizioni semplici **p** e **q** chiameremo ***tautologia*** la proposizione composta che e' sempre vera:

p	q	tautologia
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	v

Potremo sempre avere una tautologia se consideriamo:

"O e' vera p oppure e' vera non p"

cioe' p aut $\overline{p}$.
Questo esprime il *principio del terzo escluso* : o una proposizione e' vera oppure e' falsa, non c'e' una terza alternativa: "Tertium non datur".

p	$\overline{p}$	p aut $\overline{p}$
v	f	v
f	v	v

La seconda colonna e' la negazione di **p** il vero diventa falso ed il falso diventa vero.
La terza colonna e' la disgiunzione esclusiva tra **P** e **non p**, che e' vera solo se una sola delle due componenti e' vera.

Date due proposizioni semplici **p** e **q** chiameremo *contraddizione* la proposizione composta che e' sempre falsa:

p	q	contraddizione
v	v	f
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Potremo sempre avere una contradizione se consideriamo:

"P e' vera e contemporaneamente e' vera non p"

cioe' p $\wedge$ $\overline{p}$
Per dimostrarla facciamo vedere che la sua negazione e' una tautologia (sempre vera):
e' sempre vero che una proposizione non e' contemporaneamente vera e falsa.
Questo esprime il **principio di non contraddizione**; una proposizione non puo' essere contemporaneamente vera e falsa.

In generale ogni volta che vorremo dimostrare qualcosa mostreremo che e' una tautologia.

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$	$\overline{p \wedge \bar{p}}$
v	f	f	v
f	v	f	v

La seconda colonna e' la negazione di **p** il vero diventa falso ed il falso diventa vero
La terza colonna e' lacongiunzione logica tra **P** e **non p**, che e' vera solo se entrambe le componenti sono vere
La quarta colonna e' la negazione della precedente: il vero diventa falso ed il falso diventa vero

---

Mentre la precedente pone l'accento sulla mancanza di una terza alternativa questa si limita a mostrare che una proposizione non puo' essere contemporaneamente vera e falsa.

13. Regole di deduzione

Consideriamo ora le ***regole di deduzione*** che saranno essenziali nello sviluppare un ragionamento logico:

- Concetto di regola di deduzione
- Modus ponens
- Modus tollens
- Sillogismo ipotetico
- Sillogismo disgiuntivo

a) Concetto di regola di deduzione

Le ***regole di deduzione (ragionamenti)*** sono quelle regole che permettono, partendo da certe premesse date (ipotesi) **P, Q, R,...** , di arrivare ad una determinata conclusione (tesi) **T.** Diremo che una regola di deduzione e' corretta se da premesse tutte vere segue che e' vera anche la conclusione.

In pratica le regole di deduzione sono le regole per un corretto ragionamento e saranno usate per la dimostrazione di teoremi in cui da una ipotesi vera **H** dovremo dimostrare vera una tesi **T**

Vediamo nelle pagine seguenti alcune regole di deduzione.

b) Modus ponens

Premetto due esempi di modus ponens:
1) **Se e' primavera allora i ciliegi fioriscono;**
ho che:**e' primavera**
quindi **i ciliegi fioriscono.**

2) **Se piove allora apro l'ombrello**
ho che:**piove**
quindi **apro l'ombrello.**

Il ***"modus ponens"*** si puo' rappresentare nel seguente modo:

se $P \rightarrow Q$ e' vera ed anche P e' vera, allora ne segue che Q e' vera

In simboli: $[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$

Di questa regola ne parla il filosofo Crisippo gia' nel terzo secolo avanti Cristo.

Possiamo dimostrarla mostrando che la funzione proposizionale che equivale ad essa e' sempre vera.

Dobbiamo mostrare che:

$$[(P \to Q) \wedge P\,] \to Q$$

e' sempre vera.

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge P$	$[(P \to Q) \wedge P] \to Q$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	f	v

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
la terza colonna e' l'implicazione materiale tra **P** e **Q**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
la quarta colonna e' la congiunzione logica tra **P→Q** e **P** che e' vera solo se entrambe sono vere
la quinta colonna e' l'implicazione materiale tra **(P→Q)∧P** e **Q**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa

c) Modus tollens

Premetto due esempi di modus tollens:
1) **Se e' primavera allora i ciliegi fioriscono;**
se ho che:**i ciliegi non fioriscono**
allora **non e' primavera.**

2) **Se piove allora apro l'ombrello**
se ho che: **non apro l'ombrello**
allora **non piove .**

Il ***"modus tollens"*** si puo' rappresentare nel seguente modo:

se $P \to Q$ e' vera e Q e' falsa, allora ne segue che P e' falsa

In simboli: $[\ (P \to \overline{Q)} \wedge Q\ ] \to \overline{P}$

Possiamo dimostrarla mostrando che la funzione proposizionale che equivale ad essa e' sempre vera.
Dobbiamo mostrare che:

$$[\ (P \to Q) \wedge \overline{Q}\ ] \to \overline{P}$$

e' sempre vera.

P	Q	P→ Q	$\bar{Q}$	(P→ Q) ∧ $\bar{Q}$	$\bar{P}$	[(P → Q) ∧ $\bar{Q}$] → $\bar{P}$
v	v	v	f	f	f	v
v	f	f	v	f	f	v
f	v	v	f	f	v	v
f	f	v	v	v	v	v

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
la terza colonna e' l'implicazione materiale tra **P** e **Q**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
la quarta colonna e' la negazione di **Q**
la quinta colonna e' la congiunzione logica tra **P->Q** e **non Q** che e' vera solo se entrambe sono vere
la sesta colonna e' la negazione di P
la settima colonna e' l'implicazione materiale tra **(P->Q)∧ non Q** e **non P**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa.

d) Sillogismo ipotetico

Esempi di sillogismo ipotetico:
1) **Se e' primavera allora i ciliegi fioriscono; se i ciliegi fioriscono allora arrivano le api.**
Quindi:
Se e' primavera allora arrivano le api

2) **Se sono promosso all'esame di maturita' mi iscrivo all'Universita'. Se mi iscrivo all'Universita' faccio il corso di Matematica.**
Allora:
Se sono promosso all'esame di maturita' faccio il corso di Matematica

Il ***"sillogismo ipotetico"*** si puo' rappresentare nel seguente modo:

se P → Q e' vera e anche Q → R e' vera; allora ne segue che P → R e' vera .

E' una specie di proprieta' transitiva
In simboli: $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$
Possiamo dimostrarla mostrando che la funzione proposizionale che equivale ad essa e' sempre vera.
Dobbiamo mostrare che:

$$[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$$

e' sempre vera.

P	Q	R	P→Q	Q→R	(P→Q) ∧ (Q→R)	P→R	[(P→Q) ∧ (Q→R)] →(P→R)
v	v	v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	f	f	f	v
v	f	v	f	v	f	v	v
v	f	f	f	v	f	f	v
f	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	v	f	f	v	v
f	f	v	v	v	v	v	v
f	f	f	v	v	v	v	v

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
Le prime tre colonne sono i possibili valori di **P**, **Q** ed **R**, per vedere come scriverli riguarda il secondo esempio sulle funzioni proposizionali
la quarta colonna e' l'implicazione materiale tra **P** e **Q**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
la quinta colonna e' l'implicazione materiale tra **Q** e **R**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
la sesta colonna e' la congiunzione logica tra **P→Q** e **Q→R** che e' vera solo se entrambe sono vere
la settima colonna e' l'implicazione materiale tra **P** e **R**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
l'ultima colonna e' l'implicazione materiale tra $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ e $(P \rightarrow R)$, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa.

e) Sillogismo disgiuntivo

Esempi di sillogismo disgiuntivo:
1) **O sono sveglio oppure dormo.**
Non dormo
quindi:
sono sveglio.
2) **O sono al lavoro oppure sono in vacanza.**
Non sono in vacanza
allora:
sono al lavoro.

Il ***"sillogismo disgiuntivo"*** si puo' rappresentare nel seguente modo:
se $P \vee Q$ e' vera e se anche $\overline{Q}$ e' vera, allora ne segue che P e' vera.
In simboli: $[(P \vee Q) \wedge \overline{Q}] \rightarrow P$
Possiamo dimostrarla mostrando che la funzione proposizionale che equivale ad essa e' sempre vera.
Dobbiamo mostrare che:

$$[(P \vee Q) \wedge \overline{Q}] \rightarrow P$$

e' sempre vera.

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{Q}$	$(P \vee Q) \wedge \overline{Q}$	$[(P \vee Q) \wedge \overline{Q}] \rightarrow P$
v	v	v	f	f	v
v	f	v	v	v	v
f	v	v	f	f	v
f	f	f	v	f	v

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
la terza colonna e' l'disgiunzione inclusiva tra **P** e **Q**, che e' falsa solo se **P** e **Q** sono entrambe false
la quarta colonna e' la negazione di Q
la quinta colonna e' la congiunzione logica tra **$P \vee Q$** e **non Q** che e' vera solo se entrambe sono vere
la sesta colonna e' l'implicazione materiale tra $[P \vee \overline{Q}] \wedge Q$ e **P**, che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa.

14. Dimostrazione di un teorema

Vediamo ora di affrontare in modo "logico" come si dimostra un teorema:

- Definizione di teorema
- Proposizioni di un teorema
- Metodo diretto

- Metodo inverso (assurdo)

a) Definizione di teorema

Definiamo il ***teorema*** come un enunciato che si presenta nella forma seguente:

Se Ipotesi allora Tesi

Ipotesi ⇒ Tesi

L'**Ipotesi** e' la premessa: cioe' quello che conosciamo,
La **Tesi** e' la conclusione: cioe' quello che dobbiamo provare vero.

b) Proposizioni di un teorema

Ad ogni teorema, supposto vero,

Se Ipotesi allora Tesi

sono associate quattro proposizioni; due sempre vere e due in genere false:

- Proposizione diretta
- Proposizione inversa
- Proposizione contraria
- Proposizione controinversa
- Legge delle inverse

(1) Proposizione diretta

Chiameremo ***proposizione diretta*** la proposizione:

Se Ipotesi allora Tesi

Siccome il teorema e' supposto vero (un teorema falso non ha senso), allora diremo che la proposizione diretta e' vera; cioe' partendo dall'ipotesi, tramite ragionamenti logici corretti, e' possible giungere alla tesi.

Esempio:
Se un numero e' divisibile per 4 allora il numero e' pari.

---

(2) Proposizione inversa

Chiameremo ***proposizione inversa*** la proposizione ottenuta scambiando di posto l'ipotesi e la tesi:

Se Tesi allora Ipotesi

Di solito la proposizione inversa non e' vera.

Quando e' vero anche la proposizione inversa allora diremo che ipotesi e tesi sono equivalenti: l'abbiamo gia' visto parlando della doppia deduzione logica.

Esempio:
Dal teorema precedente:
Se un numero e' divisibile per 4 allora il numero e' pari
scambiando l'ipotesi e la tesi ottengo:
Se un numero e' pari allora il numero e' divisibile per 4
In generale non e' vero: ad esempio 2 e' un numero pari ma non e' divisibile per 4.

---

(3) Proposizione contraria

Chiameremo ***proposizione contraria*** la proposizione ottenuta prendendo le negazioni dell'ipotesi e della tesi:

Se non Ipotesi allora non Tesi

Di solito la proposizione contraria non e' vera.

Esempio:
Dal teorema precedente:
Se un numero e' divisibile per 4, allora il numero e' pari.
Neghiamo l'ipotesi ed anche la tesi ottengo
Se un numero non e' divisibile per 4, allora il numero non e' pari
In generale non e' vero: ad esempio 2 non e' divisibile per 4 ma e' comunque un numero pari.

(4) Proposizione controinversa

Chiameremo **proposizione controinversa** la proposizione ottenuta prendendo le negazioni dell'ipotesi e della tesi e scambiandone le posizioni:

Se non Tesi allora non Ipotesi

La proposizione controinversa e' sempre vera.

Esempio:
Dal teorema precedente:
Se un numero e' divisibile per 4, allora il numero e' pari.
Neghiamo l'ipotesi ed anche la tesi e scambiamole di posto; ottengo:
Se un numero non e' pari, allora il numero non e' divisibile per 4.
E' vero: un numero pari per definizione e' divisibile per 2; se non e' pari allora non e' divisibile per 2 e quindi non e' neppure divisibile per 4.

(5) Legge delle inverse

La ***legge delle inverse*** dice che:
Se e' vera la proposizione diretta allora la proposizione controinversa e' sempre vera.
In simboli abbiamo la funzione proposizionale:

$$(H \rightarrow T) \rightarrow (\overline{T} \rightarrow \overline{H})$$

Mostriamo che questa e' una tautologia e quindi la relazione e' valida:

H	T	$\overline{T}$	$\overline{H}$	$H \rightarrow T$	$\overline{T} \rightarrow \overline{H}$	$(H \rightarrow T) \rightarrow (\overline{T} \rightarrow \overline{H})$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	v	f	f	f	v
f	v	f	v	v	v	v
f	f	v	v	v	v	v

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
la terza colonna e' la negazione di **T** il vero diventa falso ed il falso diventa vero
la quarta colonna e' la negazione di **H** il vero diventa falso ed il falso diventa vero
la quinta colonna e' l'implicazione materiale tra **H** e **T** che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
la sesta colonna e' l'implicazione materiale tra $\overline{T}$ e $\overline{H}$ che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa

L'ultima colonna e' l'implicazione materiale tra $\overline{\mathbf{H}} \rightarrow \overline{\mathbf{T}}$ e **T→ H** che e' falsa solo se la prima parte e' vera e la seconda parte e' falsa

---

Allo stesso modo si puo' dimostrare:
Se e' vera la contro inversa, allora e' vera la diretta.
Provalo per esercizio e poi controlla lo svolgimento:
Dimostriamo che e' valida la relazione inversa:
$(\overline{T} \rightarrow \overline{H}) \rightarrow (H \rightarrow T)$
Mostriamo che questa e' una tautologia e quindi la relazione e' valida

H	T	$\overline{T}$	$\overline{H}$	$\overline{T} \rightarrow \overline{H}$	$H \rightarrow T$	$(\overline{T} \rightarrow \overline{H}) \rightarrow (H \rightarrow T)$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	v	f	f	f	v
f	v	f	v	v	v	v
f	f	v	v	v	v	v

Per eseguire la tabella segui le tabelle delle operazioni elementari gia' fatte:
la terza colonna e' la negazione di **T** il vero diventa falso ed il falso diventa vero
la quarta colonna e' la negazione di **H** il vero diventa falso ed il falso diventa vero
la quinta colonna e' l'implicazione materiale tra $\overline{\mathbf{T}}$ e $\overline{\mathbf{H}}$ che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
la sesta colonna e' l'implicazione materiale tra **H** e **T** che e' falsa solo se la prima e' vera e la seconda e' falsa
L'ultima colonna e' l'implicazione materiale tra $\overline{\mathbf{T}} \rightarrow \overline{\mathbf{H}}$ e **H → T** che e' falsa solo se la prima parte e' vera e la seconda parte e' falsa.

Siccome e' vera sia la legge delle inverse che la proposizione inversa ne segue che i due fatti:

Se Ipotesi allora Tesi
Se non Tesi allora non Ipotesi

sono equivalenti come abbiamo gia' visto parlando della doppia deduzione logica.

c) Dimostrazione di un teorema: metodo diretto

La proposizione diretta e' alla base del metodo diretto per la dimostrazione di un teorema.

Il ***metodo diretto*** per la dimostrazione di un teorema consiste nel partire dall'ipotesi, e, con una serie di ragionamenti, arrivare alla tesi:

Ipotesi ⇒ ragionamento logico ⇒ Tesi

Esempio:
Se un numero e' divisibile per 4 allora il numero e' pari
Ipotesi: un numero e' divisibile per 4
Tesi: il numero e' pari
Ragionamento:
Se un numero e' divisibile per 4, e' divisibile anche per i fattori di 4;
2 e' un fattore di 4;
allora il numero e' divisibile per 2.
Un numero divisibile per 2 e' pari
Ne segue che il numero e' pari

Potremmo anche fare piu' semplicemente.
Ragionamento:
se un numero e' divisibile per 4 allora e' anche divisibile anche per 2
se un numero e' divisibile 2 allora e' pari.
Ne segue (sillogismo ipotetico) che:
se un numero e' divisibile per 4 allora il numero e' pari.

Nota: di solito nel ragionamento normale per impostare la dimostrazione diretta dei teoremi si usa un tipo di ragionamento che io chiamo "informatico" cioe' si parte dalla tesi e, pian piano; si cerca di arrivare all'ipotesi: una volta riusciti si rovescia il ragionamento; vediamone un esempio sul teorema precedente:
Ipotesi: un numero e' divisibile per 4
Tesi: il numero e' pari

- Parto dalla tesi: il numero e' pari
- se un numero e' pari allora e' divisibile per 2
- se e'divisibile per 2 due volte allora e' divisibile per 4

Poi rovescio il ragionamento

- Ho un numero divisibile per 4
- Se un numero e' divisibile per 4 allora e' divisibile per 2 due volte
- Se e' divisibile per 2 due volte e' divisibile per 2 anche una volta sola
- Se un numero e' divisibile per 2 almeno una volta allora il numero e' pari

e ne traggo la conclusione.

d) Dimostrazione di un terorema: metodo inverso (o per assurdo)

La proposizione cointroinversa e' alla base del metodo inverso per la dimostrazione di un teorema

---

Il ***metodo inverso*** per la dimostrazione di un teorema consiste nel negare la tesi, e, con una serie di ragionamenti, arrivare a negare l'ipotesi:

$$\overline{\textbf{Tesi}} \Rightarrow \textbf{Ragionamento logico} \Rightarrow \overline{\textbf{Ipotesi}}$$

Vediamone anche qui un esempio sempre con lo stesso teorema:
Se un numero e' divisibile per 4 allora il numero e' pari
Ipotesi: un numero e' divisibile per 4
Tesi: il numero e' pari
Ragionamento:
Nego la tesi; il numero non e' pari
Se un numero non e' pari allora non e' divisibile per 2
se un numero non e' divisibile per 2 allora non e' nemmeno divisibile per 4
Ne segue che il numero non e' divisibile per 4.
Negando la tesi ho negato anche l'ipotesi e quindi il teorema e' vero.

D. *Predicati e quantificatori*

Il linguaggio sviluppato nelle pagine precedenti costituisce il fondamento della logica, pero' e' troppo riduttivo rispetto al linguaggio naturale: per ovviare all'inconveniente dovremo indagare piu' a fondo all'interno delle proposizioni.

- Concetto di predicato
- I quantificatori
- I giudizi
- I sillogismi aristotelici

1. Concetto di predicato

Vediamo una proposizione semplice:
3 e' un numero primo.
In questa proposizione possiamo distinguere:

- l'***argomento*** che sarebbe l'oggetto di cui si parla; nel nostro caso il 3
- il ***predicato*** cioe'la parte della proposizione in cui si "predica" cioe' si enunciano le proprieta' che deve avere l'argomento; nel nostro caso: "e' un numero primo".

Se al posto di "3" poniamo un altro numero potremo dire che la nostra proposizione e' vere oppure falsa dipendentemente dal numero stesso.
3 e' un numero primo e' vera
4 e' un numero primo e' falso
Potremo anche indicare:
x e' un numero primo
in tal caso la variabile **x** rendera' la frase vera o falsa a seconda del suo valore.

Nel caso precedente diremo di avere un predicato "ad un posto".
Similmente potremo pensare a predicati a 2 posti:
x e' un multiplo di y
o a 3 o piu' posti....
x e ' il valore intermedio tra y e z: "x-y=z-x"
ma questo sara' piu' propriamente argomento della **logica dei predicati** .

2. I quantificatori

Introduciamo ore il concetto di quantificatore per potere trattare logicamente anche frasi quali:
Tutti i numeri sono divisibili per 1
Esistono numeri non primi

La loro introduzione nella logica deriva dalla necessita' di utilizzare la logica per dimostrare che una proprieta' e' valida oppure non e' valida:

Una proprieta' **e' valida** se e' valida sempre,
cioe' se **e' valida per tutti gli oggetti** su cui opera.

Una proprieta' **non e' valida** se non e' valida per almeno un elemento su cui opera,
cioe' se **esiste almeno un elemento** per cui non e' valida.

Quindi in logica dovremo indicare come considerare "**per tutti gli elementi**" oppure "**esiste almeno un elemento**".

Ci serviranno quindi i concetti di:

- Quantificatore universale
- Quantificatore esistenziale

a) Quantificatore universale $\forall$

Partiamo dalla frase classica:
Tutti gli uomini sono mortali
puo' essere trasformata nella frase equivalente:

Per ogni uomo quell'uomo e' mortale.
Cioe' se vogliamo dire **tutti** diremo **per ogni** e in simboli useremo **∀.**
Inoltre, se specifichiamo l'universo in cui considerare la proprieta', allora potremo sempre dire se la frase e' vera o falsa.

Ad esempio in matematica per scrivere:
Per tutti gli x appartenenti ad R vale la proprieta' P(x)
cioe'
Per ogni x appartenente ad R vale la proprieta' P(x) (con **R** universo)
scriveremo:
$\forall x \in R: P(x)$

---

b) Quantificatore esistenziale

Anche qui partiamo dalla frase classica:
Tutti gli uomini sono mortali
Neghiamo la frase; abbiamo visto che per negare non possiamo dire "nessun uomo e' mortale" ma dobbiamo aggiungere un "non" alla frase precedente:
Non tutti gli uomini sono mortali
e puo' essere trasformata nella frase equivalente
Esiste qualche uomo che non e' mortale
"Esiste qualche uomo" significa uno oppure due ,... oppure tutti ed e' la negazione della frase iniziale. Cioe' se vogliamo dire **non per tutti vale** diremo **esiste qualcuno per cui non vale**.
Useremo il simbolo **∃** (esiste).
Inoltre, se specifichiamo l'universo in cui considerare la proprieta', allora potremo sempre dire se la proposizione e' vera o falsa.

Ad esempio in matematica per scrivere:
Esiste almeno un x appartenente ad R per cui vale la proprieta' P(x) (con **R** universo)
scriveremo:
$\exists x \in R: P(x)$.

3. I giudizi di Aristotele

All'interno di un discorso i quantificatori potranno dare luogo a quattro giudizi diversi, i giudizi di Aristotele, intendendo con giudizio una frase costruita con il quantificatore stesso:

- Giudizio universale affermativo
- Giudizio universale negativo
- Giudizio particolare affermativo
- Giudizio particolare negativo

a) Giudizio universale affermativo

Si chiama *universale* perche' usiamo il quantificatore universale; lo chiamiamo *affermativo* perche' e' in una frase affermativa.

Come esempio di **giudizio universale affermativo** prendiamo:
Tutti gli uomini sono mortali

Che posso trasformare nella frase equivalente:
Per ogni uomo x, se x e' un uomo allora x e' mortale.

Analizziamo la frase:

- **Per ogni** e' il quantificatore universale
- **x e' un uomo** e' il primo predicato (ad un posto perche' c'e' la x), chiamiamolo **P(x)**
- **x e' mortale** e' il secondo predicato (ad un posto perche' c'e' la x), chiamiamolo **Q(x)**
- **se .... allora** e' l'implicazione

Quindi potremo scrivere:
$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$

Tramite la teoria degli insiemi e' possibile dimostrare la verita' o la falsita' del giudizio universale affermativo
Se vuoi vedere la dimostrazione:

Giudizio universale affermativo:
Dimostriamo che, mediante la teoria degli insiemi, e' possibile mostrare la verita' o meno del giudizio universale affermativo.
Partiamo dal nostro giudizio:
Per ogni uomo x, se x e' un uomo allora x e' mortale
Considero gli insiemi:
P(x) = { x : x e' un uomo }
Q(x) = { x : x e' mortale }
La scrittura:
$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$
implica che l'insieme P(x) e' contenuto nell'insieme Q(x) quindi e' vera solamente se la relazione di inclusione e' valida:
$P(x) \subseteq Q(x)$

Se invece avessi il giudizio:
Tutti i mammiferi sono animali terrestri
evidentemente e' un giudizio falso perche' i delfini, le orche e le balene sono mammiferi ma sono marini e non terrestri.
Partiamo dal nostro giudizio:
Per ogni x, se x e' un mammifero allora x e' animale terrestre
Considero gli insiemi:
P(x) = { x : x e' un mammifero }
Q(x) = { x : x e' animale terrestre }
La scrittura:
$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$
implica che l'insieme P(x) e' contenuto nell'insieme Q(x) quindi non e' vera perche' la relazione di inclusione non e' valida:
$P(x) \not\subseteq Q(x)$.

b) Giudizio universale negativo

Si chiama *universale* perche' usiamo il quantificatore universale; lo chiamiamo *negativo* perche' e' in una frase negativa.

Come esempio di **giudizio universale negativo** prendiamo:
Nessun uomo e' immortale
Che posso trasformare nella frase equivalente:
Per ogni uomo x, se x e' un uomo allora x non e' immortale

Analizziamo la frase:

- **Per ogni** e' il quantificatore universale

- **x e' un uomo** e' il primo predicato (ad un posto perche' c'e' la x), chiamiamolo **P(x)**
- **x non e' immortale** e' il secondo predicato (ad un posto perche' c'e' la x), essendo negativo chiamiamolo $\overline{\mathbf{Q}(\mathbf{x})}$
- **se .... allora** e' l'implicazione

Quindi potremo scrivere:

$\forall x, P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}$

Tramite la teoria degli insiemi e' possibile dimostrare la verita' o la falsita' del giudizio universale negativo.

Se vuoi vedere la dimostrazione:

Giudizio universale negativo:

Mostriamo che, mediante la teoria degli insiemi, e' possibile evidenziare la verita' o meno del giudizio universale negativo.

Partiamo dal nostro giudizio:

Per ogni uomo x, se x e' un uomo allora x non e' immortale

Considero gli insiemi:

$P(x) = \{ x : x \text{ e' un uomo} \}$

$Q(x) = \{ x : x \text{ e' immmortale} \}$

Considero la negazione della seconda:

$\overline{Q(x)} = \{ x : x \text{ non e' immmortale} \}$

La scrittura:

$\forall x, P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}$

implica che l'insieme P(x) e' contenuto nell'insieme complementare di Q(x).

Quindi e' vera solamente se P(x) non ha elementi comuni con Q(x);

equivale a dire che P(x) e Q(x) sono insiemi disgiunti:

$P(x) \cap Q(x) = \emptyset$

Come avrai notato la negazione di una proposizione corrisponde al complementare dell'insieme collegato

---

c) Giudizio particolare affermativo

Si chiama *particolare* perche' usiamo il quantificatore esistenziale; lo chiamiamo *affermativo* perche' e' in una frase affermativa.

Come esempio di **giudizio particolare affermativo** prendiamo:

Qualche uomo ha 90 anni

Che posso trasformare nella frase equivalente:

Esiste un x tale che x e' un uomo ed x ha 90 anni

Analizziamo la frase:

- **Esiste un x** e' il quantificatore esistenziale
- **x e' un uomo** e' il primo predicato (ad un posto perche' c'e' la x), chiamiamolo **P(x)**
- **x ha 90 anni** e' il secondo predicato (ad un posto perche' c'e' la x), chiamiamolo **Q(x)**
- **.. e ..** e' la congiunzione logica $\wedge$

Quindi potremo scrivere:

$\exists x, P(x) \wedge Q(x)$

Tramite la teoria degli insiemi e' possibile dimostrare la verita' o la falsita' del giudizio particolare affermativo.
Se vuoi vedere la dimostrazione:

Giudizio particolare affermativo:
Mediante la teoria degli insiemi, e' possibile mostrare la verita' o meno del giudizio particolare affermativo.
Partiamo dal nostro giudizio:
Esiste un x tale che x e' un uomo ed x ha 90 anni
Considero gli insiemi:
P(x) = { x : x e' un uomo }
Q(x) = { x : x ha 90 anni }
La scrittura:
$\exists$ x, P(x) $\wedge$ Q(x)
implica che l'intersezione fra gli insiemi P(x) e Q(x) non e' vuota:
P(x) $\cap$ Q(x) $\neq \emptyset$
Nella figura la parte gialla e' la parte comune (gli uomini novantenni)

La congiunzione logica corrisponde all'intersezione in teoria degli insiemi

d) Giudizio particolare negativo

Si chiama *particolare* perche' usiamo il quantificatore esistenziale; lo chiamiamo *negativo* perche' e' in una frase negativa.

Come esempio di **giudizio particolare negativo** prendiamo:
Qualche uomo non ha 90 anni
Che posso trasformare nella frase equivalente:
Esiste un x tale che x e' un uomo ed x non ha 90 anni

Analizziamo la frase:

- **Esiste un x** e' il quantificatore esistenziale
- **x e' un uomo** e' il primo predicato (ad un posto perche' c'e' la x), chiamiamolo **P(x)**
- **x non ha 90 anni** e' il secondo predicato (ad un posto perche' c'e' la x),
  essendo negativo chiamiamolo $\overline{\mathbf{Q}(\mathbf{x})}$
- **.. e ..** e' la congiunzione logica $\wedge$

Quindi potremo scrivere:
$\exists$ x, P(x) $\wedge$ $\overline{Q(x)}$

Tramite la teoria degli insiemi e' possibile dimostrare la verita' o la falsita' del giudizio particolare negativo.
Se vuoi vedere la dimostrazione:

Giudizio particolare negativo:
Mostriamo che, mediante la teoria degli insiemi, e' possibile evidenziare la verita' o meno del giudizio universale negativo.
Partiamo dal nostro giudizio:
Esiste un x tale che x e' un uomo ed x non ha 90 anni
Considero gli insiemi:
P(x) = { x : x e' un uomo }
Q(x) = { x : x ha 90 anni }
Considero la negazione della seconda:
$\overline{Q(x)}$ = { x : x non ha 90 anni }
La scrittura:
$\exists$ x, P(x) $\wedge$ $\overline{Q(x)}$

implica che l'oggetto x e' contenuto nell'insieme P(x) e non e' contenuto nell'insieme Q(x).
Quindi e' vera solamente se x appartiene alla differenza fra P(x) e Q(x):
$x \in \{P(x) - Q(x)\}$
In figura e' in rosso la parte che ci interessa (gli uomini che non sono novantenni).

4. I sillogismi aristotelici

Il ***sillogismo aristotelico*** e' un ragionamento in base al quale da due giudizi detti premesse si ottiene un altro giudizio detto conclusione.
Ognuna delle tre proposizioni componenti un sillogismo e' uno dei giudizi che abbiamo gia' visto.
Le tre proposizioni sono sempre distribuite secondo il seguente schema di ragionamento:

Premessa maggiore + Premessa minore = Conclusione

All'interno dei giudizi del sillogismo sono presenti tre diversi predicati ad un posto: indichiamoli con le lettere **A**, **M**, **B** .
Con **A** indichiamo il predicato che compare nella premessa maggiore e nella conclusione.
Con **M** indichiamo il predicato che compare nel primo e secondo giudizio.
Con **B** indichiamo l'altro predicato che compare nella premessa minore e nella conclusione.

La premessa maggiore verra' indicata con le lettere **A** e **M** (l'ordine non conta: potra' essere anche **M** e **A**).
La premessa minore verra' indicata **B** e **M** (l'ordine non conta).
La conclusione verra' indicata **B** e **A** (qui l'ordine conta).

Esempio:
Preso il giudizio:
Tutti gli uomini sono mortali
E' composto dai due predicati:
x e' un uomo e' un predicato a un posto
x e' mortale e' l'altro predicato a un posto

Vediamo un esempio per chiarire meglio; prendiamo il sillogismo classico:

a) **Tutti gli uomini sono mortali**
b) **Socrate e' un uomo**
c) **Socrate e' mortale**

I tre giudizi sono:

a) **Tutti gli uomini sono mortali**
giudizio universale affermativo
b) **Socrate e' un uomo**
giudizio particolare affermativo
c) **Socrate e' mortale**
giudizio particolare affermativo

I tre predicati ad un posto sono:

- A **x e' mortale** Compare nel primo e nel terzo giudizio
- M **x e' un uomo** Compare nel primo e nel secondo giudizio
- B **x e' Socrate** Compare nel secondo e terzo giudizio

Con queste premesse, osservando come si dispone il termine **M**, possiamo ottenere 4 figure diverse (le prime 3 sono dovute ad Aristotele e la quarta a Galeno):

- Prima figura
- Seconda figura
- Terza figura
- Quarta figura

- Conclusione

a) Prima figura

Premessa maggiore + Premessa minore = Conclusione

Indico:
(M -- A) la premessa maggiore
(B -- M) la premessa minore
(B -- A) la conclusione
Considerando i predicati avremo la prima figura quando il termine medio compare al primo ed al quarto posto cioe'

(M -- A) + (B -- M) = (B -- A)

Come esempio abbiamo il sillogismo classico:

- **Tutti gli uomini sono mortali**
- **Socrate e' un uomo**
- **Socrate e' mortale**

Che nei particolari diventa:
(x e' un uomo M) -- (x e' mortale A) +
(x e' Socrate B) -- (x e' un uomo M) =
(x e' Socrate B) -- (x e' mortale A)

E' possibile dimostrarne la validita' o meno utilizzando la teoria degli insiemi ed i diagrammi di Eulero Venn . Dimostrazione :
Dimostriamo la validita' (o meno) del sillogismo:

- **Tutti gli uomini sono mortali**
- **Socrate e' un uomo**
- **Socrate e' mortale**

mediante i diagrammi di Eulero-Venn
Socrate appartiene all'insieme degli uomini
l'insieme degli uomini appartiene all'insieme dei mortali
quindi otteniamo la figura a destra ed il ragionamento e' valido essendo Socrate contenuto all'interno dell'insieme dei mortali

---

Vediamo anche un esempio di sillogismo non valido:

- **Tutti gli gatti sono felini**
- **Tutti i leoni sono felini**
- **Qualche leone e' un gatto**

Tutti i gatti sono felini significa:
{ gatti } $\subset$ { felini}
Tutti i leoni sono felini significa:
{ leoni } $\subset$ { felini }
Qualche leone e' un gatto significa:
{ leoni } $\cap$ { gatti } $\neq \emptyset$

Mediante i diagrammi di Eulero-Venn i 3 giudizi dicono:
L'insieme dei gatti e' contenuto nell'insieme dei felini **vero**
L'insieme dei leoni e' contenuto nell'insieme dei felini **vero**
L'insieme dei leoni e l'insieme dei gatti hanno qualche elemento in comune **falso**
Otteniamo la figura a destra ed il ragionamento non e' valido essendo l'insieme dei leoni e l'insieme dei gatti disgiunti.

b) Seconda figura

Premessa maggiore + Premessa minore = Conclusione

Indico:
(A -- M) la premessa maggiore
(B -- M) la premessa minore
(B -- A) la conclusione
Considerando i predicati avremo la seconda figura quando il termine medio compare al secondo ed al quarto posto cioe':

(A -- M) + (B -- M) = (B -- A)

Come esempio consideriamo il sillogismo:

- **Tutti i delfini sono mammiferi**
- **Qualche cetaceo e' un mammifero**
- **Qualche cetaceo e' un delfino**

Che nei particolari diventa:
(x e' un delfino A) -- (x e' un mammiferoM) +
(x e' un cetaceo B) -- (x e' un mammifero M) =
(x e' un cetaceo B) -- (x e'un delfino A)

E' possibile dimostrarne la verita' o la non verita' utilizzando la teoria degli insiemi ed i diagrammi di Eulero Venn .

c) Terza figura

Premessa maggiore + Premessa minore = Conclusione

Indico:
(M -- A) la premessa maggiore
(M -- B) la premessa minore
(B -- A) la conclusione
Considerando i predicati, avremo la terza figura quando il termine medio compare al primo ed al terzo posto cioe' :

(M -- A) + (M -- B) = (B -- A)

Come esempio consideriamo il sillogismo:

- **Qualche parallelogramma e' un quadrato**
- **Qualche parallelogramma e' un rettangolo**
- **Qualche rettangolo e' un quadrato**

Che nei particolari diventa:
(x e' un parallelogramma M) -- (x e' un quadratoA) +
(x e' un parallelogramma M) -- (x e' un rettangolo B) =
(x e' un rettangolo B) -- (x e' un quadrato A)

E' possibile dimostrarne la verita' o la non verita' utilizzando la teoria degli insiemi ed i diagrammi di Eulero Venn.

d) Quarta figura

Mentre gli altri 3 sono dovuti ad Aristotele, quest'ultimo e' dovuto a Galeno, medico e scienziato del secondo secolo dopo Cristo.

Premessa maggiore + Premessa minore = Conclusione

Indico:
(A -- M) la premessa maggiore
(M -- B) la premessa minore
(B -- A) la conclusione
Considerando i predicati, avremo la quarta figura quando il termine medio compare al secondo ed al terzo posto cioe':

(A -- M) + (M -- B) = (B -- A)

Come esempio consideriamo il sillogismo:

- **Alcuni pesci sono animali marini**
- **Qualche animale marino respira acqua**
- **L'acqua e' respirata dai pesci**

Che nei particolari diventa:
(x e' un pesce A) -- (x e' animale marinoM) +
(e' animale marino M) -- (x respira acqua B) =
>(x respira acqua B) -- (x e' un pesce A)

E' possibile dimostrarne la verita' o la non verita' utilizzando la teoria degli insiemi ed i diagrammi di Eulero Venn.

e) Conclusione

In definitiva ogni sillogismo e' composto di 3 giudizi ed i giudizi sono di 4 tipi diversi.
Quindi posso fare tanti sillogismi quante sono le disposizioni con ripetizione di 4 oggetti presi 3 a 3 cioe':

$D'_{4;3} = 4^3 = 64$

Inoltre per ogni sillogismo posso considerare 4 figure diverse, di conseguenza abbiamo in totale:

$64 \cdot 4 = 256$ possibili tipi diversi di sillogismo di cui moltissimi scorretti.

Per riconoscere la validita' o meno di un sillogismo possiamo ricorrere, caso per caso, alla teoria degli insiemi ed ai diagrammi di Eulero-Venn come abbiamo visto nella prima figura.

E. *Logica e teoria degli insiemi*

La logica formale e' strettamente collegata alla teoria degli insiemi.
Possiamo osservare che esiste una stretta analogia fra le operazioni fra insiemi e connettivi logici:

LOGICA	INSIEMI
Congiunzione logica	**Intersezione**
Disgiunzione inclusiva	**Unione**
Negazione	**Insieme complementare**

Questo ci porta a pensare che la logica e la teoria degli insiemi siano diversi aspetti di uno stesso ramo della matematica; ma di questo potremo parlarne piu' ampiamente quando introdurremo il concetto di isomorfismo.