Successioni e serie

A. *Generalita' sulle successioni*

1. Introduzione

In questa sezione ci occupiamo di successioni, che in matematica trovano molte applicazioni : addirittura e' possibile riscrivere tutta l'analisi matematica prendendo come base la nozione di limite di una successione, d'altra parte anche l'insieme **N** dei numeri naturali puo' essere pensato come una successione.

Da qui l'importanza dell'argomento che, secondo me, merita un capitolo a parte.

2. Definizione

Definiamo ***Successione*** un insieme di numeri che si susseguono in determinato ordine. I numeri possono essere interi, razionali, reali, complessi; l'importante e' che per ogni numero dato sappiamo scrivere quello che viene dopo; per scrivere quello che viene dopo devo capire qual'e' la legge che mi da'i termini della successione.

Esempio 1
Questa e' una successione perche' per ogni numero posso scriverne il successivo:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\dots$$

e viene detta successione dei numeri naturali **N.**

Esempio 2
Anche qui per ogni numero posso scriverne il successivo:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\dots$$

e' una cosiddetta successione geometrica (ci torneremo poi); si puo' anche scrivere:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots\dots.$$

Esempio 3
Anche qui per ogni numero posso scriverne il successivo:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\dots$$

e' la successione dei numeri pari.

Esempio 4
Non sempre e' possibile trovare una regola matematica che ci permetta di scrivere immediatamente i termini di una successione .
Anche questa e' una successione, ma non e' immediato capire come scrivere i termini:

$$1, 8, 7, 5, 4, 15, \dots\dots$$

Lo puoi capire se scrivi i numeri in lettere:

uno, otto, sette, cinque, quattro, quindici, ...

Se conti le lettere che formano i numeri, vedi che sono:

$$3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\dots$$

Quindi la successione e' formata dai numeri naturali (piu' piccoli) che hanno il numero di lettere del loro nome uguali a 3,4,5,6,7,8,..
Quando ho individuato la legge della successione ho individuato i termini della successione stessa: il prossimo termine sara' 29 perche' ventinove e' il numero naturale piu' basso il cui nome e' formato da 9 lettere.
Non possiamo esprimere la legge che genera questa successione in termini matematici; lasciando ai giornali di enigmistica successioni di questo tipo, noi ci occuperemo solamente di successioni la cui legge sia esprimibile mediante una formula matematica.

Come definizione quella sopra non e' molto "matematica"; puo' andare bene per un biennio, ma per le classi superiori ci vuole qualcosa di piu' efficace.
Possiamo utilizzare il concetto di funzione dicendo:

Definiamo successione in un insieme **K** qualunque applicazione (o funzione) da **N** a **K** tale che ad ogni valore **1,2,...n, ∈ N** faccia corrispondere un valore in **K** in modo che, individuato il valore corrispondente al termine **n**, si sappia sempre individuare quale valore corrisponde al termine **n+1**

Insomma definiamo la successione mediante la regola di induzione.

Per le successioni che studieremo **K** puo' essere **N**, **R**, o qualunque altro insieme numerico; naturalmente dovremo sempre dire di quale insieme si tratta: quindi diremo successione in **N**, successione in **R**, ...

3. Nomenclatura

Per ogni successione:
il valore corrispondente ad 1 lo chiameremo ***primo termine*** e lo indicheremo con a_1
il valore corrispondente a 2 lo chiameremo ***secondo termine*** e lo indicheremo con a_2
il valore corrispondente a 3 lo chiameremo ***terzo termine*** e lo indicheremo con a_3
....
il valore corrispondente ad n lo chiameremo ***ennesimo termine (n-mo termine)*** e lo indicheremo con a_n
il valore corrispondente ad n+1 lo chiameremo ***n piu' unesimo termine (n+1-mo termine)*** e lo indicheremo con a_{n+1}
....

Indicheremo una successione generica con i simboli:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$$

Una successione potra' essere definita enumerando i primi termini, oppure mediante la legge che la genera, oppure od anche con la scrittura del termine generico

Vediamo un esempio.
Consideriamo la successione di potenze del 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

Sarebbe anche a dire:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots$$

Posso anche definirla come:
La successione di potenze a base 2 con esponente un numero naturale.
Posso comunque definirla semplicemente indicando il termine generico:

$$a_n = 2^n$$

Noi, di solito, indicheremo una successione, tipo quella dell'esempio, come segue, cercando sempre di evidenziare i numeri naturali collegati alla successione stessa:

$$2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n, 2^{n+1}, \ldots$$

Di solito nei testi viene indicato solamente il termine generico ennesimo cioe' 2^n, senza indicare il termine 2^{n+1}.

Io preferisco indicare anche questo ultimo termine per due ragioni:

- Ritengo che cosi' la legge che genera la successione sia piu' chiara.
- Inoltre, in questo modo, ricalco la legge di induzione matematica (anche se qui, magari, non c'entra molto): se una proprieta' e' vera per il primo termine ed essendo valida per l'ennesimo termine e' valida anche per il termine n+1, allora essa e' valida per tutti i termini.

Anticipo ora, in modo intuitivo, il concetto di convergenza di una successione; concetto che approfondiremo successivamente:

- Diro' che una successione e' convergente se i suoi termini si avvicinano indefinitamente ad un numero preciso (intuitivamente: se la differenza fra due termini successivi all'aumentare dei termini si riduce avvicinandosi a zero)
  Esempio
  La successione:
  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots \ldots \ldots$
  al crescere del valore di **n** siavvicina a **0.**
  La successione:
  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}, \ldots \ldots \ldots$
  si avvicina ad 1 (e due termini successivi molto "avanti" nella successione hanno differenza vicina a **0**; ad esempio: **1000/1001 - 999/1000 = 0,000000999** hanno differenza meno di un milionesimo).
- Diro' che una successione e' *divergente* se i suoi termini crescono oltre ogni limite.
  Esempio:
  La successione:
  1, 2, 3, 4, ... n, n+1, ...
  tende a **∞**
- Diro' che una successione e' *indeterminata* se i suoi termini oscillano senza avvicinarsi a niente.
  Esempio:
  La successione:
  $+1, -1, +1, -1, \ldots (-1)^n, (-1)^{n+1}, \ldots\ldots$
  non tende a nessun numero e continua ad oscillare all'infinito.

4. Particolari tipi di successioni

In queste pagine consideriamo alcuni esempi di successioni piu' comuni e semplici, piu' a livello di semplice curiosita' che di studio.

Per avere una successione dobbiamo eseguire una o piu' operazioni in modo da sapere sempre quale termine scrivere dopo il termine considerato; cerchiamo di presentarle secondo l'operazione che le genera.

Premetto che la classificazione non e' una cosa che sia "ufficiale" ma e' solo una speculazione mia, nel senso che spesso (essendo un prodotto un insieme di somme ed una potenza un insieme di prodotti) una successione potra' essere generata da operazioni diverse e quindi la classificazione successiva e' del tutto personale ed arbitraria: consideratela una specie di gioco senza darvi troppa importanza.

- somme e differenze
- prodotto per -1
- prodotti con fattori a segno alterno
- prodotti
- quozienti

- elevamenti a potenza
- alcune successioni particolari

Partiremo dalla successione dei numeri Naturali.
E' la successione per eccellenza: dominio di tutte le possibili successioni; si puo' anche considerare come successione identica **i** che applica **N** su se' stesso **i:N→N**

1, 2, 3, ... , n, n+1, ...

Di solito si considera 1 come valore iniziale; in qualche testo si preferisce farla iniziare da 0:

0, 1, 2, ..., n, n+1, ...

La successione e' divergente, nel senso che il valore di suoi termini cresce tendendo ad ∞.

a) Successioni generate da somme

(1) Somma della successione naturale con una costante

Partendo dalla successione dei numeri naturali:

1, 2, 3, ... , n, n+1, ...

possiamo considerare tutte le successioni che si ottengono sommando un numero intero positivo ad ogni termine, ad esempio, sommando 5:

1+5, 2+5, 3+5, ... , n+5, n+5+1, ...

o meglio:

6, 7, 8, ..., 5+n, 5+n+1, ...

oppure posso sommare un numero negativo, ad esempio -8:

-8+1, -8+2, -8+3, ... ,-8+n, -8+n+1, ...

o meglio:

-7, -6, -5, ..., -8+n, -8+n+1, ...

Naturalmente quelle che iniziano da un numero negativo sono successioni in **Z** (cioe', considerate come funzioni hanno codominio l'insieme dei numeri interi **Z**).
Anche queste, come la successione di partenza, sono tutte successioni divergenti (tendono ad ∞).

(2) Successione dei numeri pari

Partendo dalla successione dei numeri naturali:

1, 2, 3, ... , n, n+1, ...

posso considerare di sommare ogni termine con se' stesso:

1+1, 2+2, 3+3, ... , n+n, (n+1)+(n+1), ...

Otteniamo la successione dei numeri pari.

La successione dei numeri pari applica **N** su una parte di se' stesso **s:N→N+N** o meglio **s:N→2N**(essendo **2N** il sottoinsieme di **N** formato dai numeri pari), facendo corrispondere ad ogni numero il suo doppio; siccome la corrispondenza e' biunivoca tale successione mostra che l'insieme **N** e' un insieme infinito (un insieme infinito e' un insieme che e' in corrispondenza biunivoca con una sua parte: in **N** ad ogni numero corrisponde il suo doppio e ad ogni numero doppio [se e' doppio e' anche pari] corrisponde la sua meta').

Potremmo indicare la successione con:

2, 4, 6, ... , n+n, (n+1)+(n+1), ...

ma e' preferibile indicarla con:

2, 4, 6, ... , 2n, 2n+2, ...

Possiamo anche farla iniziare da zero senza variare i termini dopo i puntini; tanto i puntini sono elastici e possono indicare indifferentemente quanti termini servono:

0, 2, 4, ..., 2n, 2n+2, ...

od anche da un qualunque numero pari positivo:

6, 8, 10, ..., 6+2n, 6+2n+2, ...

Anche negativo, ma in tal caso l'applicazione e' **s:N→Z**

-8, -6, -4, ..., -8+2n, -8+2n+2, ...

Queste successioni sono tutte divergenti.

(3) Succesione dei numeri dispari

Importante!
Per scrivere correttamente un numero dispari generico conviene prima scrivere un numero pari **2n** e poi aumentarlo di 1 scrivendo **2n+1** (cioe' usiamo il fatto che il successivo di qualunque numero pari e' dispari).

Partiamo dalla successione dei numeri pari (quella che inizia da **0**) e, ad ogni termine, sommiamo +1:

0+1, 2+1, 4+1, ..., 2n+1, 2n+2+1, ...

Otteniamo la successione dei numeri dispari.
La successione dei numeri dispari applica **N** su una parte di se' stesso **s:N→N+N+1**, o meglio **s:N→2N+1** facendo corrispondere ad ogni numero il suo doppio aumentato di uno.
Indichiamo la successione con:

1, 3, 5, ... , 2n+1, 2(n+1)+1, ...

Da notare che la successione dei numeri dispari e' complementare, rispetto ad **N** della successione dei numeri pari, nel senso che unendo la successione dei numeri pari con la successione dei numeri dispari otteniamo tutto **N**.

Possiamo anche farla iniziare da un qualunque numero dispari positivo.

5, 7, 9, ..., 5+2n , 5+2n+2, ...

Anche qui i puntini sono elastici e possono indicare indifferentemente quanti termini servono; inoltre, essendo 5 dispari posso togliere il +1 dopo il 2n (la somma di un numero dispari e di uno pari e' dispari).
Puo' anche iniziare da un numero dispari intero negativo, ma in tal caso l'applicazione e' **s:N→Z :**

-7, -5, -3, ..., -7+2n , -7+2n+2, ...

Queste successioni sono tutte divergenti.

(4) Successione di Fibonacci

Qualcuno la chiama serie di Fibonacci, perche' c'e' da fare la somma fra due termini; pero' io preferisco pensarla come successione considerando le serie come somme di tutti i termini precedenti.

E' una successione da **N** in **N** che fa corrispondere ad ogni termine la somma dei due termini precedenti.
Indichiamo la successione con:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

Ecco come fare i calcoli per trovare i termini:

Vediamo come scrivere i termini della successione:
- Primo termine $\mathbf{a_1 = 1}$ questo lo definiamo noi

- Secondo termine $\mathbf{a_2 = 1+0 = 1}$ siccome esiste solo il primo termine per trovare il secondo lo sommiamo a **0**
- Terzo termine $\mathbf{a_3 = a_1 + a_2 = 1+1 = 2}$ sommo il primo termine con il secondo
- Quarto termine $\mathbf{a_4 = a_2 + a_4 = 1+2 = 3}$ sommo il secondo termine con il terzo
- Quinto termine $\mathbf{a_4 = a_3 + a_3 = 2+3 = 5}$ sommo il terzo termine con il quarto
- Sesto termine $\mathbf{a_6 = a_4 + a_5 = 3+5 = 8}$ sommo il quarto termine con il quinto
- Settimo termine $\mathbf{a_7 = a_5 + a_6 = 5+8 = 13}$ sommo il quinto termine con il sesto
- Ottavo termine $\mathbf{a_8 = a_6 + a_7 = 8+13 = 21}$ sommo il sesto termine con il settimo
- Nono termine $\mathbf{a_9 = a_7 + a_8 = 13+21 = 34}$ sommo il settimo termine con l'ottavo
- Decimo termine $\mathbf{a_{10} = a_8 + a_9 = 21+34 = 55}$ sommo l'ottavo termine con il nono
- ....
- ....
- ....

Un po' difficile indicare il termine generico; possiamo comunque rimediare dicendo:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

(ogni termine e' la somma dei due termini precedenti).

E' una successione con molte applicazioni interessanti; ad esempio puo' indicare come si evolve la popolazione formata da una coppia di conigli lasciati liberi di riprodursi quando le risorse sono infinite.

2 conigli fanno in media 3 figli e diventano 5 conigli
5 conigli fanno in media 8 figli e diventano 13 conigli
13 conigli fanno in media 21 figli e diventano 34 conigli
eccetera eccetera ....

Anche la successione di Fibonacci e' divergente e tende all'infinito in modo "piuttosto rapido".
Vedremo poi di specificare meglio il concetto.

b) Successioni generate da prodotto per -1

In genere saranno le stesse successioni (a parte Fibonacci); bastera' considerare i prodotti per -1, cioe' i numeri interi negativi. E' raro considerarle, ma qualche volta servono:

- successione dei numeri interi negativi
- successione dei numeri pari negativi
- successione dei numeri dispari negativi

(1) Successione dei numeri interi negativi

Moltiplicando per **-1** ogni termine della successione naturale:

$$0, 1, 2, 3, \dots\ n, n+1, \dots$$

Otteniamo la successione naturale cambiata di segno che applica **N** in un sottoinsieme di **Z** **a:N→Z :**

$$0, -1, -2, -3, \dots, -n, -n-1, \dots$$

Qui di solito, essendo in **Z** si inizia da **0.**
Possiamo similmente considerare tutte le successioni che iniziano da un qualunque numero intero, sommandolo alla successione stessa ad esempio, iniziando da -6 :

$$-6+0, -6-1, -6-2, -6-3, \dots, -6-n, -6-n-1, \dots$$

meglio scrivere:

$$-6, -7, -8, \dots, -6-n, -6-n-1, \dots$$

oppure +4 :

+4+0, +4-1, +4-2, +4-3, +4-4, +4-5, +4-6, ... , +4-n, +4-n-1, ...

meglio scrivere:

+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2,.., +4-n, +4-n-1, ...

Queste successioni sono tutte divergenti.

(2) Successione dei numeri pari negativi

Possiamo moltiplicare per **-1**ogni termine della successione dei numeri pari:

2, 4, 6, 8, ..., n, n+1, ...

Siccome siamo in **Z** (per poter moltiplicare per -1) cominciamo da **0**, considerando:

0, 2, 4, 6, 8, ..., n, n+1, ...

ed otteniamo la successione:

0·(-1), 2·(-1), 4·(-1), 6·(-1), ... , 2n·(-1), (2n+2)·(-1), ...

o meglio, piu' semplicemente:

0, -2, -4, -6, ... , -2n, -2n-2, ...

Possiamo anche farla iniziare da un qualunque numero pari negativo semplicemente sommandolo alla successione data, ad esempio se sommo -6 :

0-6, -2-6, -4-6, -6-6, ... , -2n-6, -2n-2-6, ...

meglio scrivere:

-6, -8, -10, ..., -6-2n, -6-2n-2, ...

Possiamo iniziare anche da un numero positivo,ad esempio +8 :

+8+0, +8-2, +8-4, ... , +8-2n, +8-2n-2, ...

Scriviamola:

+8, +6, +4, ..., +8-2n, +8-2n-2, ...

Anche tutte queste successioni sono divergenti.

(3) Successione dei numeri dispari negativi

Considero la successione dei numeri dispari:

1, 3, 5, 7, ..., 2n+1, 2n+2+1, ...

Moltiplico per **-1**ogni termine della successione:

1·(-1), 3·(-1), 5·(-1), 7·(-1), ..., (2n+1)·(-1), (2n+2+1)·(-1), ...

Otteniamo la successione dei numeri dispari che applica **N** su una parte di **Z**
s:N→Z facendo corrispondere ad ogni numero il suo doppio diminuito di uno.
Scriviamo meglio la successione come:

-1, -3, -5, ... , -2n-1, -2n-2-1, ...

Utilizzando la somma possiamo anche farla iniziare da un qualunque numero dispari positivo, ad esempio per farla iniziare da +5 sommo +6 ad ogni termine:

+6-1, +6-3, +6-5, +6-7, ... , +6-2n-1, +6-2n-2-1, ...

meglio scrivere:

5, 3, 1, -1,...., 5-2n , 5-2n-2, ...

I puntini sono elastici e possono indicare indifferentemente quanti termini servono.
Puo' anche iniziare da un numero intero negativo, ad esempio-5; bastera' sommare -4 ad ogni termine:

-4-1, -4-3, -4-5, ... , -4-2n-1, -4-2n-2-1, ...
-5, -7, -9, ..-., -5-2n , -5-2n-2, ...

Anche qui abbiamo che tutte le successioni sono divergenti.

c) Successioni generate da prodotti con fattori a segno alterno

Qui, considerando alternativamente il prodotto per **+1** e per **-1** possiamo avere delle successioni "oscillanti": vediamo un esempio per ogni tipo: convergente, divergente ed indeterminata.
Il problema che si pone e' come far cambiare di segno un temine in modo alterno (cioe' prima positivo, poi negativo, poi ancora positivo, eccetera).
Per fare questo useremo la proprieta' che la potenza di un numero negativo risulta positiva quando la potenza e' pari mentre risulta negativa se la potenza e' dispari; quindi bastera' considerare come fattore moltiplicativo, per ogni termine :

$$(-1)^n$$

Infatti se **n** e' pari:

$$(-1)^n = +1$$

mentre se **n** e' dispari:

$$(-1)^n = -1$$

- successione oscillante convergente
- successione oscillante divergente
- successione oscillante indeterminata

(1) Successione oscillante convergente

Per fare questo caso consideriamo la successione armonica che definiremo pero' successivamente, quando faremo l'operazione di divisione:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \dots \dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots \dots \dots$$

> *Termine variabile come divisore*
> Qui abbiamo una successione molto importante, che applica **N** in un sottoinsieme di **Z**
> **a:N→Z**
> $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \dots \dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots \dots \dots$$
> e' detta successione armonica e converge verso il valore **0**

Per avere una successione oscillante convergente dovremo considerare una successione con i termini nell'insieme **Q** :

$$a: N \to Q$$

$$+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, \dots \dots \dots$$

Per indicare che il segno e' alternato nel termine generico introduciamo il fattore **$(-1)^n$**, quindi potremo indicare la successione:

$$+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, \dots \dots \dots (-1)^n \frac{1}{n}, (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}, \dots \dots \dots$$

Questa successione converge verso **0.**

(2) Successione oscillante diverdente

Per avere una successione oscillante divergente dovremo considerare una successione con i termini nell'insieme **Z**

$$a : N \to Z$$

$$+1, -2, +3, -4, +5, -6, \ldots\ldots$$

Per indicare che il segno e' alternato nel termine generico introduciamo il fattore $(-1)^n$, quindi potremo indicare la successione:

$$+1, -2, +3, -4, +5, -6, \ldots, (-1)^n\, n, (-1)^{n+1}\,(n+1), \ldots$$

Questa successione diverge verso ∞ (senza segno perche' salta continuamente dal positivo al negativo).

(3) Successione oscillante indeterminata

Molto interessante e' la successione in **Z** :

$$a: N \rightarrow Z$$

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots\ldots$$

Al solito, per indicare che il segno e' alternato nel termine generico introduciamo il fattore $(-1)^n$, quindi potremo indicare la successione:

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \ldots$$

Questa successione salta continuamente dal positivo al negativo (come se in una stanza una lampadina si accendesse su una parete ed un altra, alternativamente, sulla parete di fronte); quindi mantiene sempre la stessa distanza fra due termini successivi e non puo' ne' convergere ne' divergere: diremo che e' ***oscillante indeterminata.***

d) Successioni generate da prodotti

Vediamo altri tipi di prodotti che possono generare successioni.

- Prodotto per 0
- Prodotto per una costante diversa da 0

(1) Prodotto per 0 (successione nulla)

Moltiplicando qualunque successione per **0** avremo una successione nulla.
Per avere la successione nulla dovremo considerare una successione:

$$a : N \rightarrow \{0\}$$

$$0, 0, 0, 0, 0, \ldots, n \cdot 0, (n+1) \cdot 0, \ldots$$

Questa successione converge verso **0** .
Se consideriamo un numero qualunque (ad esempio 3), potremo avere infinite successioni costanti semplicemente sommando tale numero ad ogni termine della successione:

$$3, 3, 3, 3, 3, \ldots, (n \cdot 0)+3, [(n+1) \cdot 0]+3, \ldots$$

Possiamo considerare anche un numero negativo:

$$-7, -7, -7, -7, -7, \ldots, (n \cdot 0)+(-7), [(n+1) \cdot 0]+(-7), \ldots$$

(2) Prodotto per una costante diversa da zero

Moltiplicando qualunque successione per una costante, avremo sempre una successione dello stesso tipo di quella di partenza; nel senso che se la successione di partenza convege, diverge oppure e' oscillante allora anche la successione prodotto per una costante converge, diverge od e' oscillante.

Esempio 1
Considero la successione divergente dei numeri naturali:
1, 2, 3, 4, ... ,n, n+1, ...
moltiplicando per 5 :
5, 10, 15, 20, ... ,5·n, 5·(n+1), ...
e' una successione che diverge come la successione di partenza.

Esempio 2
Considero la successione convergente:
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\dots\dots\dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots$$
moltiplicando per 5 :
$$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \dots\dots\dots\dots \frac{5}{n}, \frac{5}{n+1}, \dots\dots\dots$$
e' una successione che converge a 0 come la successione di partenza.

Esempio 3
Considero la successione oscillante indeterminata:
+1, -1, +1, -1, +1, -1, ..., $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$, ...
moltiplicando per 5 :
+5, -5, +5, -5, +5, -5, ..., $5\cdot(-1)^n$, $5\cdot(-1)^{n+1}$, ...

e) Successioni generate da quozienti

(1) Divisione per una costante

Dividendo qualunque successione per una costante, avremo sempre una successione dello stesso tipo di quella di partenza.
Nel senso che se la successione di partenza convege, diverge oppure e' oscillante allora anche la successione quoziente per una costante converge, diverge od e' oscillante.

Esempio 1
Considero la successione divergente dei numeri naturali:
1, 2, 3, 4, ... ,n, n+1, ...
dividendo per 6:
$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} \dots\dots\dots\dots \frac{n}{6}, \frac{n+1}{6}, \dots\dots\dots$$
o meglio, semplificando le frazioni,:
$$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \dots\dots\dots\dots \frac{n}{6}, \frac{n+1}{6}, \dots\dots\dots$$
e' una successione che diverge come la successione di partenza.

Esempio 2
Considero la successione convergente:
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\dots\dots\dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots$$
dividendo per 6:
$$\frac{1}{6}, \frac{1}{2\cdot 6}, \frac{1}{3\cdot 6}, \frac{1}{4\cdot 6}, \frac{1}{5\cdot 6} \dots\dots\dots\dots \frac{1}{n\cdot 6}, \frac{1}{(n+1)\cdot 6}, \dots\dots\dots$$
o meglio:
$$\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30} \dots\dots\dots\dots \frac{1}{6n}, \frac{1}{6(n+1)}, \dots\dots\dots$$
e' una successione che converge a 0 come la successione di partenza.

Esempio 3

Considero la successione oscillante indeterminata:

+1, -1, +1, -1, +1, -1, ..., $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$, ...

dividendo per 6:

$$\frac{+1}{6},\frac{-1}{6},\frac{+1}{6},\frac{-1}{6},\frac{+1}{6}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{(-1)^n}{n\cdot 6},\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 6},\ldots\ldots\ldots$$

Anche questa resta una successione oscillante indeterminata che salta continuamente dal valore -1/6 al valore +1/6.

(2) Termine variabile come divisore

Qui abbiamo una successione molto importante, che applica **N** in un sottoinsieme di **Z** :

$$a: N \to Z$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\ldots\ldots\ldots$$

e' detta ***successione armonica*** e converge verso il valore **0.**

(3) Rapporto fra due termini variabili

La situazione si fa piu' interessante quando abbiamo una frazione con termini variabili sia al numeratore che al denominatore; supponiamo prima che i due termini differiscano di 1. Queste successioni applicano **N** in un sottoinsieme di **Q.**

$a: N \to Q$

Supponiamo prima che il numeratore superi di 1 il denominatore:

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n+1}{n},\frac{(n+1)+1}{n+1},\ldots\ldots\ldots$$

Questa e' una successione convergente i cui termini sono tutti superiori ad 1 e che tende al valore **1.**

Supponiamo ora che il denominatore superi di 1 il numeratore:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{(n+1)+1},\ldots\ldots\ldots$$

Questa e' una successione convergente i cui termini sono tutti inferiori ad 1 e che tende al valore **1.**

Se invece della costante 1 prendo qualunque costante diversa da zero, la successione che ottengo e' sempre dello stesso tipo: cioe' converge sempre al valore 1.

Se, ad esempio, considero come costante il valore 5 ottengo per la prima successione (il numeratore supera di 5 il denominatore):

$$\frac{5+1}{1},\frac{5+2}{2},\frac{5+3}{3},\frac{5+4}{4},\frac{5+5}{5},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n+5}{n},\frac{(n+5)+1}{n+1},\ldots\ldots\ldots$$

o meglio:

$$6,\frac{7}{2},\frac{8}{3},\frac{9}{4},2,\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n+5}{n},\frac{(n+5)+1}{n+1},\ldots\ldots\ldots$$

Anche questa successione e' formata di tutti termini superiori ad 1 e tende al valore 1.

Per la seconda successione, considerando sempre 5 il valore della costante, avremo:

$$\frac{1}{5+1},\frac{2}{5+2},\frac{3}{5+3},\frac{4}{5+4},\frac{5}{5+5}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n}{n+5},\frac{n+1}{(n+1)+5},\ldots\ldots\ldots$$

o meglio:

$$\frac{1}{6},\frac{2}{7},\frac{3}{8},\frac{4}{9},\frac{1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n}{n+5},\frac{n+1}{(n+1)+5},\ldots\ldots\ldots$$

E' formata di tutti termini inferiori ad 1 e tende anch'essa al valore 1.
Se invece la costante vale 0 allora otteniamo una successione con tutti termini uguali ad 1 (di un tipo gia' considerato).

f) Elevamenti a potenza

(1) Termine variabile alla base

Considero la successione:

$$s: N \to N$$

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots$$

o meglio:

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots$$

E' una successione divergente:
Come ho considerato la potenza 2 posso considerare qualunque numero naturale (diverso da zero, altrimenti otteniamo la successione costante $1, 1, 1, 1, \ldots n^0, (n+1)^0, \ldots$).
Ad esempio, se considero 5 ottengo:

$$1^2, 2^5, 3^5, 4^5, \ldots, n^5, (n+1)^5, \ldots$$

o meglio

$$1, 32, 243, 1024, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots$$

Prima di procedere conviene ripassare le potenze ad esponente frazionario, ricordando che l'esponente negativo porta la potenza al denominatore e l'esponente frazionario si puo' esprimere con un radicale avente indice il denominatore ed esponente il numeratore:

$$a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$$

$$a^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

Come ho considerato un numero naturale, posso considerare un numero intero negativo.
Ad esempio -2:

$$1^{-2}, 2^{-2}, 3^{-2}, 4^{-2}, \ldots, n^{-2}, (n+1)^{-2}, \ldots$$

o meglio:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \ldots \ldots \ldots$$

ma anche un numero frazionario positivo oppure negativo.
Positivo, esempio + ¾ :

$$1^{3/4}, 2^{3/4}, 3^{3/4}, 4^{3/4}, \ldots, n^{3/4}, (n+1)^{3/4}, \ldots$$

o meglio:

$$1, \sqrt[4]{2^3}, \sqrt[4]{3^3}, \sqrt[4]{4^3}, \ldots \ldots \ldots \sqrt[4]{n^3}, \sqrt[4]{(n+1)^3}, \ldots \ldots \ldots$$

Negativo, esempio - ¾:

$$1^{-3/4}, 2^{-3/4}, 3^{-3/4}, 4^{-3/4}, \ldots, n^{-3/4}, (n+1)^{-3/4}, \ldots$$

o meglio:

$$1, \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{27}}, \frac{1}{\sqrt[4]{64}}, \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3}}, \ldots \ldots \ldots$$

od anche (in forma un poco piu' comprensibile):

$$1, \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{4^3}}, \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3}}, \ldots \ldots \ldots$$

C'e' da dire che, se l'esponente e' positivo allora la successione e' divergente, mentre se l'esponente e' negativo la successione e' convergente a zero.

(2) Esponente variabile con base positiva

Distinguiamo 3 casi:

1. base compresa fra 0 ed 1
2. base uguale ad 1
3. base maggiore di 1

1. **Base compresa fra 0 ed 1.**
   Consideriamo come esempio la base ½
   Avremo:
   $(½)^1, (½)^2, (½)^3, (½)^4, \dots\dots (½)^n, (½)^{(n+1)},$
   o meglio:
   $$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\dots\dots\dots\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{(n+1)}},\dots\dots\dots$$
   Altro esempio: base ¾ . Avremo:
   $(¾)^1, (¾)^2, (¾)^3, (¾)^4, \dots\dots (¾)^n, (¾)^{(n+1)},$
   o meglio:
   $$\frac{3}{4},\frac{9}{16},\frac{27}{64},\frac{81}{256}\dots\dots\dots\frac{3^n}{4^n},\frac{3^{(n+1)}}{4^{(n+1)}},\dots\dots\dots$$
   In questi casi tutte le successioni sono convergenti a zero.
2. **Base uguale ad 1.**
   Se la base e' uguale ad **1** allora otterremo la successione costante:
   $1^1, 1^2, 1^3, 1^4, \dots\dots 1^n, 1^{(n+1)}, \dots\dots$
   cioe':
   $1 , 1 , 1 , 1 , \dots\dots 1^n, 1^{(n+1)}, \dots\dots$
   Che e' di un tipo che abbiamo gia' visto.
3. **Base maggiore di 1.**
   La base puo' essere intera:
   $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots\dots 3^n, 3^{(n+1)}, \dots\dots$
   cioe':
   $3, 9, 27, 81, \dots\dots 3^n, 3^{(n+1)}, \dots\dots$
   oppure puo' essere frazionaria:
   $(3/2)^1, (3/2)^2, (3/2)^3, (3/2)^4, \dots\dots (3/2)^n, (3/2)^{(n+1)},$
   o meglio:
   $$\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{27}{8},\frac{81}{16}\dots\dots\dots\frac{3^n}{2^n},\frac{3^{(n+1)}}{2^{(n+1)}},\dots\dots\dots$$
   Tutte queste successioni sono divergenti.

(3) Esponente variabile con base negativa o nulla

BASE NULLA
Se la base e' nulla ritroviamo la nostra successione nulla:

$$0^1, 0^2, 0^3, 0^4, \dots\dots , 0^n, 0^{(n+1)},\dots\dots$$

cioe':

$$0, 0, 0, 0, \dots\dots, 0^n, 0^{(n+1)},\dots\dots$$

BASE NEGATIVA

Essendo la base negativa, avremo sempre una successione oscillante perche' se l'esponente e' pari avremo un termine positivo; mentre, se l'esponente e' dispari, il termine restera' negativo. Distinguiamo 3 casi:

1. base compresa fra 0 e -1
2. base uguale ad -1
3. base minore di -1

1.

Base compresa fra 0 e -1.

avremo una successione oscillante convergente a zero

Consideriamo come esempio la base **-½** .

Avremo:

$(-\frac{1}{2})^1, (-\frac{1}{2})^2, (-\frac{1}{2})^3, (-\frac{1}{2})^4, \ldots\ldots (-\frac{1}{2})^n, (-\frac{1}{2})^{(n+1)},$

o meglio:

$$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{16} \ldots\ldots\ldots\ldots \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \ldots\ldots\ldots$$

2.

Base uguale a -1.

Se la base e' uguale a **-1** allora otterremo la successione oscillante indeterminata:

$(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \ldots\ldots, (-1)^n, (-1)^{(n+1)}, \ldots\ldots$

cioe'

$-1 , +1 , -1 , +1 , \ldots\ldots(-1)^n, (-1)^{(n+1)}, \ldots\ldots$

che e' di un tipo che abbiamo gia' visto.

3.

Base minore di -1.

Se la base e' minore di **-1** avremo sempre una successione oscillante divergente verso **∞** (senza segno).

Consideriamo come esempio **-3**

$(-3)^1, (-3)^2, (-3)^3, (-3)^4, \ldots\ldots(-3)^n, (-3)^{(n+1)}, \ldots\ldots$

cioe'

$-3, +9, -27, +81, \ldots\ldots (-3)^n, (-3)^{(n+1)}, \ldots.$

(4) Termine variabile sia alla base che all'esponente

Anche questa e' una successione molto interessante:

$$1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots\ldots\ldots , n^n, (n+1)^{(n+1)},\ldots\ldots$$

cioe':

$$1 , 4, 27, 256, \ldots\ldots\ldots , n^n, (n+1)^{(n+1)},\ldots\ldots$$

E' una successione che diverge molto rapidamente.

Se l'esponente e' negativo (cioe' la potenza si riferisce al denominatore) allora diventa convergente:

$$1^{(-1)}, 2^{(-2)}, 3^{(-3)}, 4^{(-4)}, \ldots\ldots\ldots , n^{(-n)}, (n+1)^{(-n-1)},\ldots\ldots$$

cioe':

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{n^n}, \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}, \ldots\ldots\ldots$$

Se e' negativa la base, allora la successione diventa oscillante perche' la potenza pari rende positivo il segno del termine, mentre la potenza dispari lascia il segno negativo:

$$(-1)^1, (-2)^2, (-3)^3, (-4)^4, ..., (-n)^n, (-n-1)^{(n+1)},.....$$

cioe'

$$-1 , +4, -27, +256, ..., (-n)^n, (-n-1)^{(n+1)},.....$$

La successione diverge verso infinito (senza segno).

Se sono negativi sia la base che l'esponente, diventa oscillante e la successione converge a zero.
Infatti il segno negativo dell'esponente pone la base al denominatore ed il segno negativo della base fa in modo che, per ogni termine, la potenza dispari resti negativa e la potenza pari diventi positiva:

$$(-1)^{(-1)}, (-2)^{(-2)}, (-3)^{(-3)}, (-4)^{(-4)}, ..., (-n)^{(-n)}, (-n-1)^{(-n-1)},.....$$

cioe':

$$-1, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{27}, +\frac{1}{64}, \dots\dots\dots\dots \frac{1}{(-n)^{(-n)}}, \frac{1}{(-n-1)^{(-n-1)}}, \dots\dots\dots$$

g) Alcune successioni particolari

Qui mettiamo alcune successioni che sono un po' particolari e che e' difficile definire con semplici operazioni (a parte forse la prima)

- successione fattoriale
- successione di Nepero
- altre successioni
- successione dei numeri triangolari

(1) Successione fattoriale

Veramente sarebbe piu' giusto chiamarla serie fattoriale, perche' ogni termine si ottiene coinvolgendo il termine precedente, ma non formalizziamoci troppo

---

Ricordo che il fattoriale di un numero naturale e' il prodotto di quel numero per tutti i suoi antecedenti.
Esempio:
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
Considero la successione **s:N→N** formata dai fattoriali dei numeri naturali:
$1!, 2!, 3!, 4!, 5!, ... ,n!, (n+1)!, ...$
cioe':
$1, 2 \cdot 1, 3 \cdot 2 \cdot 1, 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, ... ,n!, (n+1)!, ...$
od anche:
$1 , 4, 6, 24, 120, ... ,n!, (n+1)!, ...$
E' una successione divergente (e anche molto "rapidamente").

(2) Successione di Nepero

E' la successione:

$$s : N \rightarrow R$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \ldots\ldots\ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \ldots\ldots\ldots$$

cioe':

$$2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots\ldots\ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \ldots\ldots\ldots$$

od anche:

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots\ldots\ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \ldots\ldots\ldots$$

E' una successione convergente al numero di Nepero **e**

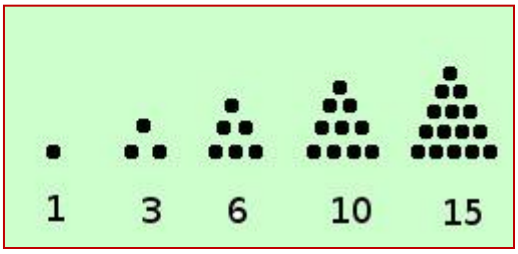
(3) Altre successioni verso numeri trascendenti

Possiamo considerare altre successioni che tendono a **π**, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ma non conviene anche perche' risulteranno formule molto complicate.
Se vuoi calcolare i valori di tali numeri, con la precisione che vuoi, conviene fare riferimento allo sviluppo in serie di potenze, che troverai in analisi.

(4) Successione dei numeri geometrici

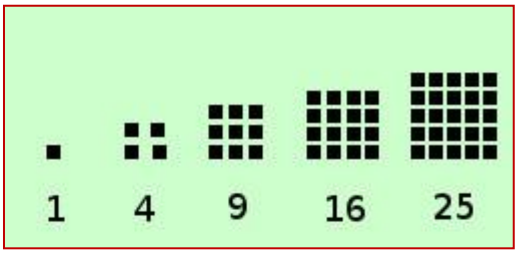
Sono quei numeri che possiamo chiamare ***triangolari***, ***quadratici***, ... nel piano; ***cubici*** nello spazio... eccetera.

Definiamo triangolare un numero come un quelli che vedete a destra, cioe' tale che, considerato come insieme di unita', posso disporre tali unita' in modo che la figura sia corrispondente ad un triangolo equilatero.



Se consideriamo tali numeri possiamo indicare la successione:
1, 3, 6, 10, 15,... $a_{n-1}+n$, $a_n+(n+1)$, ...
Cioe' ogni termine successivo si ottiene aggiungendo al termine precedente tante unita' quant'e'il posto del termine che cerco.
Esempio:
1 e' il primo termine, per avere il secondo termine devo fare 1+2
3 e' il secondo termine, per avere il terzo termine devo fare 3+3
6 e' il terzo termine, per avere il quarto termine devo fare 6+4
10 e' il quarto termine, per avere il quinto termine devo fare 10+5
15 e' il quinto termine, per avere il sesto termine devo fare 15+6
....
E' una successione **$a: N \rightarrow N$** divergente.

Similmente possiamo considerare i numeri "quadratici".
Definiamo numero quadratico un numero come un quelli che vedete a destra , cioe' che, considerato come insieme di unita', posso disporre tali unita' in modo che la figura sia corrispondente ad un quadrato.



Se consideriamo tali numeri possiamo indicare la successione:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots n^2, (n+1)^2, \ldots\ldots$$

Abbiamo gia' visto questa successione quando abbiamo considerato le potenze a base variabile.

Possiamo anche passare allo spazio e considerare la successione dei cubi dei numeri naturali, anche questa gia' considerata assieme alla precedente:

$$1, 8, 27, 64, 125, \ldots n^3, (n+1)^3, \ldots\ldots$$

o per estensione le potenze quarte, quinte..... eccetera, ma di solito vengono considerate come semplici successioni di potenze senza dar loro particolare importanza

B. *Progressioni*

In questo capitolo studiamo un particolare tipo di successioni, le progressioni, cioe' le successioni che si ottengono sommando o moltiplicando in modo regolare: l'argomento di solito e' affrontato nel biennio delle scuole medie superiori;
riprenderemo nel prossimo capitolo lo studio delle successioni in modo piu' generale ed approfondito:

- progressioni aritmetiche
- progressioni geometriche

1. Progressioni aritmetiche

a) Definizione di progressione aritmetica

Definiamo **progressione aritmetica** una successione in cui e' costante la differenza fra ogni termine ed il suo antecedente.
Il primo termine, non avendo antecedente, non fa parte della definizione.

Esempio:

3, 7, 11, 15, 19,..... , a_n, ...

Di solito, nella progressione, il termine generico si indica con $\mathbf{a_n}$ invece che con la legge che genera il termine.

La differenza, nelle progressioni aritmetiche, viene indicata con il simbolo **d** (iniziale di differenza) e si chiama **ragione.**
Nella nostra progressione abbiamo che la ragione e':

$d = 4$

Infatti abbiamo:

3

Per ottenere gli altri termini sommo **4** (la ragione) al primo termine e poi ad ogni termine: successivo:

$3 + 4 = 7$
$7 + 4 = 11$
$11 + 4 = 15$
$15 + 4 = 19$
.....

Se la *ragione* e' positiva, allora la progressione e' crescente (tende a $+\infty$).
Esempio primo termine **-2** e ragione **½**:

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\dots$$

Ecco come fare i calcoli:
Primo termine: **-2**
Sommiamo la ragione **+½** al primo termine e ad ogni termine successivo:

Secondo termine: $-2+\frac{1}{2}=\frac{-4+1}{2}=-\frac{3}{2}$

Terzo termine: $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{-3+1}{2}=-\frac{2}{2}=-1$

Quarto termine: $-1+\frac{1}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$

Quinto termine: $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$

Sesto termine: $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Settimo termine: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$

Ottavo termine: $1+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

....

....

Se la ragione e' **0** , allora abbiamo una successione costante.
Esempio primo termine **1** e ragione **0**:
1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

Se la ragione e' negativa allora la progressione e' decrescente e tende a **-∞**
Esempio primo termine **3** e ragione **-2**:
3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, ...

Ecco come fare i calcoli:
Primo termine: **3**
Sommiamo la ragione **-2** al primo termine e ad ogni termine successivo.
Secondo termine: **3 - 2 = -1**
Terzo termine: **-1 - 2 = -3**
Quarto termine: **-3 - 2 = -5**
Quinto termine: **-5 - 2 = -7**
Sesto termine: **-7 - 2 = -9**
....
....

b) Ricerca di un termine qualunque della progressione geometrica

Siccome la differenza fra ogni termine e l'antecedente resta costante, conoscendo il primo termine e la ragione possiamo trovare un termine qualunque della progressione.
Infatti, ad esempio, data la progressione di primo termine **3** e ragione **5** abbiamo:
Primo termine: **3**
Secondo termine: $3+5=8=3+5\cdot 1$

Terzo termine: $8 + 5 = 13 = 3 + 5 \cdot 2$
Quarto termine: $13 + 5 = 18 = 3 + 5 \cdot 3$
Quinto termine: $18 + 5 = 23 = 3 + 5 \cdot 4$
Sesto termine: $23 + 5 = 28 = 3 + 5 \cdot 5$
....

Quindi se voglio il centesimo termine, bastera' fare:
centesimo termine: $3 + 5 \cdot (100-1) = 3 + 5 \cdot 99 = 498$
Quindi la formula per trovare il termine k-esimo di una progressione aritmetica, dato il primo termine a_1 e di ragione d sara':

$$a_k = a_1 + d \cdot (k - 1)$$

Esempio:
Dato il primo termine -2 e ragione $\frac{1}{2}$, trovare il quarantesimo termine:

$$a_{40} = a_1 + \frac{1}{2} \cdot (40 - 1) = -2 + \frac{1}{2} \cdot 39 = \frac{-4 + 39}{2} = \frac{35}{2}$$

Quindi:

$$a_{40} = \frac{35}{2}$$

c) Costruzione di una progressione aritmetica dati due termini

Vediamo, su un esempio, come procedere per costruire una progressione aritmetica conoscendone due termini.
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 8$ ed anche il settimo termine $a_7 = 24$
Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo aggiungere al terzo la ragione per 4 volte (7-3); quindi, per ottenere la ragione bastera' ragionare alla rovescia, cioe' per ottenere la ragione sottraggo dal settimo termine il terzo e poi divido tale differenza per 4:

$$d = \frac{24 - 8}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Quindi la ragione e' 4 e la mia progressione e':
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

Ecco il calcolo dei termini:
i calcoli sono abbastanza semplici:
Terzo termine $a_3 = 8$
Per ottenere il secondo termine tolgo la ragione dal terzo termine:
Secondo termine $a_2 = 8 - 4 = 4$
Per ottenere il primo termine tolgo la ragione dal secondo termine:
Primo termine $a_1 = 4 - 4 = 0$
Per ottenere il quarto termine aggiungo la ragione al terzo termine:
Quarto termine $a_4 = 8 + 4 = 12$
Per ottenere il quinto termine aggiungo la ragione al quarto termine:
Quinto termine $a_5 = 12 + 4 = 16$
Per ottenere il sesto termine aggiungo la ragione al quinto termine:
Sesto termine $a_6 = 16 + 4 = 20$
Per ottenere il settimo termine aggiungo la ragione al sesto termine:
Quinto termine $a_7 = 20 + 4 = 24$
Per ottenere l' ottavo termine aggiungo la ragione al settimo termine:
Ottavo termine $a_8 = 24 + 4 = 28$
Quindi ottengo:
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale.

Supponiamo di conoscere i termini:
a_k ed a_n essendo $n > k$ (siccome se n<k la differenza diventa negativa la formula e' comunque valida: infatti se n<k invece di aggiungere devo sottrarre);
allora per ottenere a_n partendo da a_k, dovro' aggiungere a tale termine la ragione **d** moltiplicata per **(n-k)**:

$$a_n = a_k + d \cdot (n-k)$$

Adesso tratto tale uguaglianza come un'equazione: devo trovare **d**, quindi prima scrivo l'equazione alla rovescia (oppure, se preferisci, cambio di posto i termini rispetto all'uguale, cambiandoli di segno e poi li cambio di nuovo di segno):

$$d \cdot (n-k) + a_k = a_n$$

porto il termine senza la **d** dopo l'uguale

$$d \cdot (n-k) = a_n - a_k$$

adesso divido entrambe i termini per **(n-k)** (posso farlo perche' n e' diverso da k) semplificando al primo termine resta **d:**

$$d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$$

Esempio:
Dato il quinto termine $a_5 = -2$ ed il venticinquesimo termine $a_{25} = 28$, trovare i primi 7 termini della progressione aritmetica:
Applico la formula:

$$d = \frac{a_n - a_k}{n - k} = \frac{28 - (-2)}{25 - 5} = \frac{28 + 2}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

Quindi la ragione è $d = 3/2$.
Costruisco i termini della progressione:

Quinto termine:	$a_5 = -2$
Per ottenere il quarto termine tolgo la ragione dal quinto termine:	$a_4 = -2 - 3/2 = -7/2$
Per ottenere il terzo termine tolgo la ragione dal quarto termine:	$a_3 = -7/2 - 3/2 = -10/2 = -5$
Per ottenere il secondo termine tolgo la ragione dal terzo termine:	$a_2 = -5 - 3/2 = -13/2$
Per ottenere il primo termine tolgo la ragione dal secondo termine:	$a_3 = -13/2 - 3/2 = -16/2 = -8$
Invece per ottenere il sesto temine aggiungo la ragione al quinto termine:	$a_6 = - 2 + 3/2 = -1/2$
Per ottenere il settimo temine aggiungo la ragione al sesto termine:	$a_7 = - 1/2 + 3/2 = 1$

Quindi la mia progressione e'
-8, -13/2, -5, -7/2, -2, -1/2, 1, ...

d) Conoscendo il termine di posto **h** determinare il termine di posto **k**

In pratica e' l'inverso di quello che abbiamo fatto nel paragrafo precedente.
Vediamo, anche qui, sullo stesso esempio della pagina precedente, come procedere
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 8$ e la ragione **4** ; troviamo il settimo termine: $a_7 = 24$

Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo aggiungere al terzo la ragione per 4 volte (7-3). Quindi:
$a_7 = a_3 + 4 \cdot 4 = 8+16 = 24$
Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale

Supponiamo di conoscere il termine a_h e la ragione **d**; supponiamo anche $h < k$ (siccome se n < k la differenza diventa negativa, la formula e' comunque valida; infatti se n < k invece di aggiungere devo sottrarre), allora per ottenere a_k partendo da a_h, dovro' aggiungere a tale termine la ragione **d** moltiplicata per **(n-k)**

$$a_h = a_k + d \cdot (n-k)$$

Esempio:
Anche qui riferiamoci allo stesso esempio del paragrafo precedente.
Dato il quinto termine $a_5 = -2$ e la ragione $d = 3/2$, trovare il venticinquesimo termine a_{25}
Applico la formula:
$a_{25} = a_5 + 3/2 \cdot (25-5) = -2 + 3/2 \cdot 20 = -2+30 = 28$ quindi: $a_{25} = 28$

e) Somma di **n** termini di una progressione aritmetica

Prima di procedere al calcolo vi racconto un aneddoto che spero vi fara' meglio capire l'aspetto del problema.
Gauss, uno dei piu' grandi matematici mai vissuti, aveva un maestro che, per poter avere un po' di pace, dava talvolta agli allievi come esercizio il sommare un centinaio di numeri di 4 o 5 cifre ciascuno, tutti tali che la differenza fra due numeri consecutivi fosse costante (quindi una progressione aritmetica): semplificando molto l'esercizio e' come sommare i numeri da 1 a 100.
Ebbene Gauss (a 10 anni!) si limito' a scrivere sulla lavagnetta il risultato senza eseguire tanti calcoli, restando poi seduto al suo banco a braccia conserte mentre i suoi compagni sudavano per una buona ora
Quale fu il metodo seguito da Gauss?
se sommo 1 con 100 ottengo 101
se sommo 2 con 99 ottengo 101
se sommo 3 con 98 ottengo 101
....
....
se sommo 49 con 52 ottengo 101
se sommo 50 con 51 ottengo 101
in pratica ottengo 101 per 50 volte cioe' 5050
Qui si vede la grandezza matematica di Gauss: quando si affronta un problema non si deve correre a fare i calcoli ma bisogna cercare di vedere tutte le possibili relazioni che possono esistere fra gli elementi del problema stesso; forse c'e' una scorciatoia che ci permette di risolvere senza troppe operazioni.

Vogliamo sommare n termini di una progressione aritmetica data, la somma sara' data da:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Per la proprieta' commutativa della somma posso anche scrivere:
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1$

Sommo termine a termine le due uguaglianze:
$S_n+S_n = 2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3+a_{n-2}) \ldots\ldots + (a_{n-2}+a_3) + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$

Essendo la differenza fra i termini costante (progressione aritmetica) avremo che le somme dei termini dentro parentesi sono uguali:
$(a_1+a_n) = (a_2+a_{n-1}) = (a_3+a_{n-2}) = \ldots = (a_{n-2}+a_3) = (a_{n-1}+a_2) = (a_n+a_1)$

Quindi, essendo **n** le parentesi, posso scrivere:
$2S = (a_1+a_n) \cdot n$
da cui dividendo per 2, otteniamo la formula finale:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Esempio 1:
Facciamo un esempio tipo quello di Gauss, limitandoci a 20 termini.

Eseguire la seguente somma:
7291 + 7489 + 7687 + 7885 + 8083 + 8281 + 8479 + 8677 + 8875 + 9073 + 9271 + 9469 + 9667 + 9865 + 10063 + 10261 + 10463 + 10661 + 10859 + 11057 =

La differenza fra due termini consecutivi e' costante; si tratta di una progressione aritmetica e la ragione e' **$d = 198$** (ho scelto 198 perche', scritto il primo numero a caso, e' molto facile scrivere gli altri; basta aumentare ogni numero di 200 e poi togliere 2: cioe' 7291+200 =7491 e poi 7491-2=7489 eccetera...)
I termini sono: **$n = 20$**
Applico la formula:

$$S_{20} = \frac{7291 + 11057}{2} \cdot 20 = 18348 \cdot 10 = 183480$$

Quindi **$S_{20} = 183480$**

Esempio 2:
Sommare i primi quaranta termini della progressione aritmetica:
7, 17/2, 10,......
Devo trovare il quarantesimo temine, ma prima devo trovare la ragione; basta fare la differenza fra due termini consecutivi:

$$d = \frac{17}{2} - 7 = \frac{17-14}{2} = \frac{3}{2}$$

Ora posso trovare il quarantesimo termine:

$$a_{40} = a_1 + \frac{3}{2} \cdot (40 - 1) = 7 + \frac{3}{2} \cdot 39 = 7 + \frac{117}{2} = \frac{14 + 117}{2} = \frac{131}{2}$$

Adesso applico la formula:

$$S_{40} = \frac{1}{2} \cdot \left(7 + \frac{131}{2}\right) \cdot 40 = \frac{1}{2} + \left(\frac{14 + 131}{2}\right) \cdot 40 = 145 \cdot 10 = 1450$$

Quindi: **$S_{40} = 1450$**

2. Progressioni geometriche

a) Definizione

Definiamo **progressione geometrica** una successione in cui e' costante il quoziente fra ogni termine ed il suo antecedente.
Il primo termine, non avendo antecedente, non fa parte della definizione.

Esempio:
3, 6, 12, 24, 48,...... , a_n, ...
Il termine generico si indica con a_n.

Il quoziente, nelle progressioni geometriche, viene indicata con il simbolo **q** (iniziale di quoziente) e si chiama **ragione**.
Nella nostra progressione abbiamo che la ragione e':
$q = 2$
Infatti abbiamo:
3
Per ottenere gli altri termini moltiplico **2** (la ragione) col primo termine e poi con ogni

termine successivo:

$3 \cdot 2 = 6$
$6 \cdot 2 = 12$
$12 \cdot 2 = 24$
$24 \cdot 2 = 48$
.....

Ora distinguiamo i casi:

- Primo termine positivo
- Primo termine negativo

Primo termine positivo

Se il primo termine e' positivo, ricordando che la ragione, essendo un rapporto, non puo' essere nulla, consideriamo i seguenti casi:

1. Ragione positiva:
   - La ragione e' maggiore di 1.
     Se la ragione e' maggiore di 1 la progressione geometrica e' crescente e tende ad **∞.**
     Esempio: primo termine **4** e ragione **q=2** **:**
     4, 8, 16, 32, 64, ...
   - La ragione e' uguale ad 1.
     Se la ragione e' uguale ad 1 la progressione geometrica e' costante.
     Esempio: primo termine **4** e ragione **q=1** **:**
     4, 4, 4, 4, 4, ...
   - La ragione e' compresa fra 0 ed 1.
     Se la ragione e' compresa fra 0 ed 1 la progressione geometrica e' calante e tende ad **0.**
     Esempio: primo termine **4** e ragione **q=½** **:**
     $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \dots$
2. Ragione negativa
   - Ragione minore di -1.
     Se la ragione e' minore di -1 la progressione geometrica e' oscillante e tende ad **∞** (senza segno).
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=-2** **:**
     -4, +8, -16, +32, -64, ...
   - Ragione uguale a -1
     Se la ragione e' uguale a -1 la progressione geometrica e' oscillante.
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=-1**
     -4, +4, -4, +4, -4, ...
   - Ragione compresa fra -1 e 0.
     Se la ragione e' compresa fra -1 e 0 la progressione geometrica e' oscillante e tende a **0.**
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=-½** **:**
     $-4, +2, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, \dots \dots$

Primo termine negativo

Se il primo termine e' negativo, ricordando che la ragione, essendo un rapporto, non puo' essere nulla, consideriamo i seguenti casi:

1. Ragione positiva:
   - La ragione e' maggiore di 1.
     Se la ragione e' maggiore di 1, la progressione geometrica e' decrescente e tende a **-∞.**
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=2** **:**
     -4, -8, -16, -32, -64, ...
   - La ragione e' uguale ad 1.
     Se la ragione e' uguale ad 1 la progressione geometrica e' costante.
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=1**
     -4, -4, -4, -4, -4, ...

- La ragione e' compresa fra 0 ed 1.
  Se la ragione e' compresa fra 0 ed 1 la progressione geometrica e' crescente e tende a **0.**
  Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=½:**
  $$-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \dots$$

2. Ragione negativa:
   - Ragione minore di -1
     Se la ragione e' minore di **-1** la progressione geometrica e' oscillante e tende ad **∞** (senza segno).
     Esempio: primo termine **+4** e ragione **q=-2 :**
     +4, -8, +16, -32, +64, ...
   - Ragione uguale a -1.
     Se la ragione e' uguale a **-1** la progressione geometrica e' oscillante.
     Esempio: primo termine **+4** e ragione **q=-1**
     +4, -4, +4, -4, +4, ...
   - Ragione compresa fra -1 e 0
     Se la ragione e' compresa fra -1 e 0 la progressione geometrica e' oscillante e tende a **0.**
     Esempio: primo termine **+4** e ragione **q=-½ :**
     $$+4, -2, +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \dots$$

b) Ricerca di un termine qualunque

Siccome il quoziente fra ogni termine e l'antecedente e' costante, conoscendo il primo termine e la ragione possiamo trovare un termine qualunque della progressione.
Infatti, ad esempio, data la progressione geometrica di primo termine 3 e ragione 2, abbiamo:

Primo termine: 3
Secondo termine: $3 \cdot 2 = 6$
Terzo termine: $6 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
Quarto termine: $12 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$
Quinto termine: $24 \cdot 2 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$
Sesto termine: $48 \cdot 2 = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$

....

Quindi, se voglio l'undicesimo termine, bastera' fare:
undicesimo termine : $3 \cdot 2^{(11-1)} = 3 \cdot 2^{10}\ 3 \cdot 1024 = 3072$
Quindi la formula per trovare il temine k-esimo di una progressione geometrica, dato il primo termine a_1 e di ragione q sara':

$$a_k = a_1 \cdot q^{(k-1)}$$

Esempio:
Dato il primo termine -2 e ragione 3 trovare il decimo termine:
$a_{10} = a_1 \cdot 3^{(10-1)} = -2 \cdot 3^9 = -2 \cdot 19683 = -39366$

c) Costruzione di una progressione dati due termini

Vediamo, su un esempio, come procedere per costruire una progressione aritmetica conoscendone due termini.
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 12$ ed anche il settimo termine $a_7 = 192$

Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo moltiplicare il terzo la ragione per 4 volte (7-3); quindi, per ottenere la ragione bastera' ragionare alla rovescia, cioe' per ottenere la ragione divido il settimo termine per il terzo e poi eseguo la radice quarta di

tale differenza.
Quindi:
$q^4 = 192:12 = 16$
quindi (siccome 2^4 fa 16) posso scrivere:
$q = \sqrt[4]{16} = 2$
Quindi la ragione e' **2** e la mia progressione e':
3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...

Ecco come calcolare i termini:
Ho la ragione: $q = 2$
Terzo termine: $a_3 = 12$
Per ottenere il secondo termine divido il terzo termine per la ragione,
Secondo termine: $a_2 = 12:2 = 6$
Per ottenere il primo termine divido il secondo termine per la ragione,
Primo termine: $a_1 = 6:2 = 3$
Per ottenere il quarto termine moltiplico il terzo termine per la ragione,
Quarto termine: $a_4 = 12\cdot 2 = 24$
Per ottenere il quinto termine moltiplico il quarto termine per la ragione,
Quinto termine: $a_5 = 24\cdot 2 = 48$
Per ottenere il sesto termine moltiplico il quinto termine per la ragione,
Sesto termine: $a_6 = 48\cdot 2 =960$
per ottenere il settimo termine moltiplico il sesto termine per la ragione,
Settimo termine: $a_7 = 96\cdot 2 = 192$
Per ottenere l' ottavo termine moltiplico il settimo termine per la ragione,
Ottavo termine: $a_8 = 192\cdot 2 = 384$
....
....
Quindi ottengo:
3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384,....

Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale.
Supponiamo di conoscere i termini:
a_k ed a_n essendo $n > k$
Allora per ottenere a_n partendo da a_k, dovro' moltiplicare tale termine per la ragione q elevata ad **(n-k):**
$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}$
Adesso tratto tale uguaglianza come un'equazione; devo trovare q :
$q^{(n-k)} = \frac{a_n}{a_k}$
Estraggo la radice:
$q = \sqrt[(n-k)]{\frac{a_n}{a_k}}$
Vale quindi la formula:

$$q = \sqrt[(n-k)]{\frac{a_n}{a_k}}$$

Esempio:
Dato il sesto termine $a_6 = 1$ ed il dodicesimo termine $a_{12} = 1/729$ di una progressione geometrica, trovare i primi 10 termini.

Applico la formula:

$$q = \sqrt[(n-k)]{\frac{a_n}{a_k}} = \sqrt[6]{\frac{\frac{1}{729}}{1}} = \sqrt[6]{\frac{1}{729}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^6}} = \frac{1}{3}$$

Nel quarto passaggio ho scomposto in fattori il termine 729 e semplificato la radice con l'esponente;
quindi la ragione è: $q = ⅓$
Costruisco i termini della progressione:
Quinto termine: $a_6 = 3$
Per ottenere il quinto termine divido il sesto termine per la ragione
Quinto termine: $a_5 = 1:⅓ = 1·3 = 3$
Per ottenere il quarto termine divido il quinto termine per la ragione
Quarto termine: $a_4 = 3:⅓ = 3·3 = 9$
Per ottenere il terzo termine divido il quarto termine per la ragione
Terzo termine: $a_3 = 9:⅓ = 9·3 = 27$
Per ottenere il secondo termine divido il terzo termine per la ragione
Secondo termine: $a_2 = 27:⅓ = 27·3 = 81$
Per ottenere il primo termine divido il secondo termine per la ragione
Primo termine: $a_1 = 81:⅓ = 81·3 = 243$
Invece per ottenere il settimo temine moltiplico il sesto termine per la ragione
Settimo termine: $a_7 = 1 \cdot ⅓ = 1/3$
Per ottenere l' ottavo termine moltiplico il settimo termine per la ragione
Ottavo termine: $a_8 = ⅓ \cdot ⅓ = 1/9$
Per ottenere il nono termine moltiplico l'ottavo termine per la ragione
Nono termine: $a_9 = 1/9 \cdot ⅓ = 1/27$
Per ottenere il decimo termine moltiplico l'ottavo termine per la ragione
Decimo termine: $a_{10} = 1/27 \cdot ⅓ = 1/81$
Quindi la mia progressione, fino al decimo termine e':
243, 81, 27, 9, 3, 1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81

d) Conoscendo il termine di posto **h** determinare il termine di posto **k**

In pratica e' l'inverso di quello che abbiamo fatto nella pagina precedente.
Vediamo, anche qui, sullo stesso esempio della pagina precedente, come procedere.
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 12$ e la ragione 2, troviamo il settimo termine $a_7 = 192$.

Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo moltiplicare il terzo per la ragione per 4 volte (7-3).
Quindi:

$$a_7 = a_3 \cdot 2^4 = 12·16 = 192$$

Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale.

Supponiamo di conoscere il termine a_k e la ragione q
supponiamo, per semplicita' anche $k<n$
allora per ottenere a_k partendo da a_h, dovro' moltiplicare tale termine per la ragione q elevata all'esponente **(n-k)**

$$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}$$

(siccome se k>n la differenza n-k diventa negativa la formula e' comunque valida: infatti, essendo n-k un esponente negativo significa che devo moltiplicare per l'inverso, cioe' dividere, come vedi nell'esempio successivo).

Esempio: anche qui riferiamoci allo stesso esempio del paragrafo precedente.
Dato il sesto termine $a_6 = 96$ e la ragione $q = 2$ trovare il secondo termine a_2 .
Applico la formula:
$a_2 = a_6 \cdot 2^{2-6} = 96 \cdot 2^{-4} = 96/2^4 = 96/16 = 6$ quindi $a_2 = 6$.

e) Somma di **n** termini di una progressione geometrica

La somma di n termini di una progressione geometrica e' alla base del calcolo di una rata, quindi fondamentale in matematica finanziaria ed attuariale.

Vogliamo sommare n termini di una progressione geometrica data, la somma sara' data da:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Moltiplicando tutti i termini sia prima che dopo l'uguale per la ragione q ottengo:

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots\dots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

Siccome ogni termine della progressione moltiplicato per q mi da' il termine successivo posso scrivere

$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$
l'ultimo termine lo scrivo $a_n \cdot q$ invece che a_{n+1}

Adesso faccio la differenza fra questa uguaglianza e quella iniziale:

$$
\begin{array}{l}
S_n \cdot q = \quad a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \quad - \\
S_n \quad = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
\hline
S_n \cdot q - S_n = \quad -a_1 + a_n \cdot q
\end{array}
$$

Infatti gli altri termini si eliminano fra loro.
Adesso la tratto come un'equazione per calcolare S_n

Raccolgo S_n:
$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$

ma $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Ottengo:
$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1$

Cioe':
$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1$

Raccolgo anche a_1:
$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$

Divido entrambe i membri per (q-1) ed ottengo la formula finale:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

o meglio:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Esempio:
Calcoliamo la somma dei primi 10 termini della progressione geometrica:
3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536
La ragione **q** vale **2** (per trovarla basta dividere il secondo termine per il primo 6:3=2):
quindi applico la formula:

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot (2^{10} - 1) = 3 \cdot (1024 - 1) \;=\; 3(1023) \;=\; 3069$$

Quindi: **S_{10}= 3069.**

f) Somma dei termini di una progressione geometrica

Vediamo come e' possibile sommare tutti i termini di una progressione geometrica nel caso in cui la ragione sia inferiore ad 1 (se la ragione e' superiore ad 1 la progressione diverge)

Abbiamo visto la formula:
$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$
Scriviamola, cambiando segno sia sopra che sotto, come:
$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$
Posso anche scrivere, suddividendo i numeratori in due frazioni:
$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} \cdot \frac{a_1 q^n}{1 - q}$$
Essendo **q** un numero inferiore ad 1, maggiormente cresce la sua potenza e minore e' il valore della frazione, cioe' possiamo dire:
$$\lim_{n \to \infty} - \frac{a_1 q^n}{1 - q} = - \frac{a_1 \cdot 0}{1 - q} = 0$$
Quindi posso scrivere la formula:
$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Esempio:
Calcoliamo la somma dei termini della progressione geometrica:
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \ldots$$
La ragione e' **q = ½** ;quindi applico la formula:
$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1/2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$
Quindi:
S_∞= 1 + ½ + ¼ + ... = 2

g) Prodotto di n termini di una progressione geometrica

E' possibile calcolare il prodotto di n termini di una progressione geometrica con tutti i termini positivi.

Consideriamo la progressione:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \ldots$

Vediamo come trovare una formula per calcolare, ad esempio, il prodotto dei primi **n** termini:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot$

Prima osserviamo che vale la proprieta':

Data una progressione geometrica limitata il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi equivale al prodotto degli estremi.

Vediamolo su un esempio.

Considero la progressione geometrica limitata a 7 termini:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

Se io moltiplico gli estremi $3 \cdot 192$ ottengo 576

Se prendo 6 e 96 (secondo e sesto termine) che sono equidistanti dai due estremi anche il loro prodotto e' $6 \cdot 96 = 576$.

Infatti il secondo termine della progressione si ottiene dal primo moltiplicandolo per la ragione, mentre il penultimo termine si ottiene dall'ultimo dividendolo per la ragione; Quindi il risultato e' identico.

Quindi se i termini che considero sono equidistanti dagli estremi il primo e' moltiplicato ed il secondo e' diviso per la ragione lo stesso numero di volte, di conseguenza, moltiplicandoli, ottengo sempre un risultato uguale al prodotto degli estremi:

$3 \cdot 192 = 576$

$6 \cdot 96 = 576$

$12 \cdot 48 = 576$

$24 \cdot 24 = 576$

$48 \cdot 12 = 576$

$96 \cdot 6 = 576$

$192 \cdot 3 = 576$

Considero il prodotto dei primi **n** termini:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot$

Per la proprieta' commutativa del proidotto posso scrivere

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot$

Moltiplichiamo fra loro le due uguaglianze, usando al proprieta' associativa posso associare i termini in ordine

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$

per la proprieta' vista sopra ognuno dei prodotti entro parentesi vale $a_1 \cdot a_n$, quindi, essendo n tali prodotti, posso scrivere

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

e quindi, estraendo al radice quadrata, ottengo il risultato finale:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Esempio:
Calcoliamo il prodotto dei 7 termini della progressione geometrica precedente:
3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

$$\mathbf{P_7 = \sqrt{576^7} = 4.586.471.424}$$

(per fare i calcoli e' ottima la calcolatrice del computer)
cioe':
3·6·12·24·48·96·192 = 4.586.471.424

C. Successioni

D. Serie